Решение задач творческого тура

Ярославль,
16-20 мая

<u>8-9 классы</u>

1. Обозначим расстояние кометы от Солнца в перигелии через $R_p = 1$ а.е. (большая полуось орбиты Земли), а в афелии – через $R_a =$ а.е. (большая полуось орбиты Марса). Тогда большая полуось орбиты кометы составит

$$a = \frac{1{,}0 + 1{,}5}{2} = 1{,}25\,\text{а.е.}$$

В соответствии с третьим законом Кеплера, ее орбитальный период

$$P = a^{3/2} = 1{,}4\,\text{года.}$$

Эксцентриситет орбиты кометы

$$e = \frac{R_a - R_p}{R_a + R_p} = 0{,}2\,.$$

Поскольку период кометы не находится в простой пропорции с периодами Марса и Земли, комета время от времени должна сближаться с этими планетами и подвергаться их гравитационному влиянию. Значит, ее орбита неустойчива. Найдем скорость сближения кометы с планетами. Для этого используем систему двух уравнений:

$V_p R_p = V_a R_a$ – закон сохранения момента импульса,

$V_p^2 - V_a^2 = 2GM(R_p^{-1} - R_a^{-1})$ – закон сохранения энергии, где V_a и V_p – скорость кометы, соответственно в афелии и перигелии; M – масса Солнца; а G – постоянная тяготения. Из этой системы путем простейших преобразований можно получить очень полезные формулы эллиптического движения:

$$V_p^2 = C_p^2(1+e),\ \text{где}\ C_p^2 = \frac{GM}{R_p};$$

$$V_a^2 = C_a^2(1-e),\ \text{где}\ C_a^2 = \frac{GM}{R_p}.$$

C_p и C_a – это скорости кругового движения, которые также называют «первыми космическими» или «кеплеровыми» скоростями, соответственно на расстоянии R_p и R_a от Солнца. В нашем случае $C_p = 30$ км/с (орбитальная скорость Земли) и $C_a = 24$ км/с (орбитальная скорость Марса). Следовательно, скорость кометы в перигелии и афелии: $V_p = 33$ км/с и $V_a = 21$ км/с.

Значит, в том случае, если комета движется вблизи плоскости эклиптики в сторону обращения планет, в перигелии она будет догонять Землю со скоростью $V_p - C_p = 3$ км/с, а в афелии ее будет догонять Марс с такой же скоростью $C_a - V_a = 3$ км/с. В остальных случаях, когда орбита кометы произвольно наклонена к эклиптике, ее скорость относительно планеты легко вычисляется по правилу параллелограмма.

Поскольку диапазон расстояний кометы от Солнца невелик ($1{,}0 \div 1{,}5$ а.е.), условия ее нагрева Солнцем остаются достаточно стабильными, поэтому условия видимости кометы в основном зависят от ее положения на относительно Земли. Комета будет близка к Земле в период ночной видимости, и далека от Земли в периоды утренней и вечерней видимости.

2. В принципе, можно. Пусть D и F – диаметр и фокусное расстояние положительной линзы. Она создает в фокальной плоскости действительное изображение, которое можно рассматривать глазом, без окуляра с расстояния наилучшего зрения ($s = 20 \div 25$ см). Очевидно, что угловое увеличение при этом будет F/s. Для увеличения в 50 раз нужна линза с $F \approx 12$ м. Поле зрения такого телескопа будет равно угловому диаметру линзы, деленному на увеличение телескопа, т.е $(D/F)/(F/S)$ в радианах. В угловых минутах это составит

$$\alpha = 3438' Ds/F^2 .$$

По условию задачи, α = 10', поэтому необходима линза диаметром D = 180 см. Таких линз не существует. Если же ограничиться линзой диаметром 15-20 см, то поле зрения будет около 1'. Это вполне достаточно, для изучения планет и других небольших ярких объектов, но управляться с таким телескопом будет очень нелегко.

Решение задач творческого тура

Ярославль,
16-20 мая

10-11 классы

1. Ракете, выведенной на орбиту Земли, нужно сообщить еще некоторую скорость для дальнейшего маневра. Чтобы ракета попала на Солнце, нужно практически полностью затормозить ее орбитальное движение, т.е. сообщить ей (в противоположном направлении) орбитальную скорость Земли:

$$V_1 = \left(\frac{GM}{R}\right)^{1/2} = 30 \text{ км/с},$$

здесь $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг – масса Солнца, а R = 1 а.е. = 150 млн.км – радиус земной орбиты. С другой стороны, для запуска ракеты за пределы Солнечной системы, она должна иметь вторую космическую скорость относительно Солнца:

$$V_\infty = \left(\frac{2GM}{R}\right)^{1/2} = 42 \text{ км/с},$$

Т.е. к ее орбитальной скорости нужно добавить всего

$$V_2 = V_\infty - V_1 = 12 \text{ км/с}.$$

Учитывая, что затрата энергии пропорциональна квадрату скорости, получим относительную выгоду запуска за пределы Солнечной системы:

$$(V_1/V_2)^2 = 6{,}25 \text{ раза}.$$

Существует, однако, метод, который может заметно удешевить оба способа запуска. Это так называемый пертурбационный маневр, т.е. использование гравитационного поля движущейся планеты для движения для изменения орбиты космического аппарата. Достаточно направить ракету к Юпитеру и правильно выбрать траекторию полета, чтобы притяжение Юпитера отклонила ее либо в сторону Солнца, либо за пределы Солнечной системы. Поэтому оба способа захоронения отходов теперь становятся экономически равноправными. Для полета к Юпитеру нужна скорость, немного меньшая, чем V_2, около 9 км/с (см. задание 1 для 8-9 кл.).