

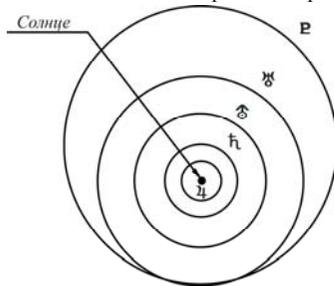
IV Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике

Решения задач теоретического тура

г. Троицк,
7-11 апреля

8-9 класс

1. Только на экваторе. В этом легко убедиться, используя любой макет небесной сферы.
2. Отношение афелия к перигелию у орбиты Плутона равно



$$\frac{A}{P} = \frac{a(1+e)}{a(1-e)} = \frac{1+e}{1-e} \approx 1.6$$

Малая полуось орбиты

$$b = \sqrt{a^2 - \Delta^2} = a\sqrt{1 - e^2} \approx 0.97a$$

То есть, на рисунке эллипс будет практически не отличаться от окружности, но Солнце (в фокусе) будет довольно далеко от центра этого эллипса. Заметим также, что из-за такого большого эксцентриситета перигелий орбиты Плутона ближе к Солнцу, чем Нептун.

3. Чтобы нигде на планете день не сменялся ночью, требуется одновременное выполнение трёх условий:

А. Угловые скорости орбитального и осевого вращения должны совпадать (другими словами – продолжительность звёздного года и звёздных суток должна быть одинаковой);

Б. Ось вращения планеты должна быть перпендикулярна плоскости орбиты (эклиптики);

В. Планета должна иметь круговую орбиту, чтобы угловая скорость орбитального вращения не менялась в течение года.

Нарушение любого из этих условий является достаточным для того, чтобы на планете была смена дня и ночи.

4. Полное солнечное затмение соответствует такому взаимному расположению Луны и Солнца на нашем небе, при котором диск Луны полностью покрывает диск Солнца. Лунный диск движется относительно солнечного с определенной скоростью, в первом приближении равной

$$u \approx 360^\circ/29.5 \text{ сут} \approx 0,51 \text{ угл.сек./сек.}$$

Очевидно, что максимальное время полного солнечного затмения будет в случае, когда центр лунного диска проходит через центр солнечного. (Это и есть принцип выбора места наблюдения: множество точек на местности, при наблюдении из которых центр одного диска проходит через центр другого, называется линией центра полосы затмения.)

В этом случае время между вторым и третьим контактами (то есть началом и окончанием полного затмения) лунный диск пройдёт относительно солнечного угловое расстояние

$$\delta = 2(\rho_s - \rho_o) = 68''.$$

Время полного затмения составит

$$\tau = \frac{\delta}{u} = \frac{68''}{0,51''/\text{сек}} \approx 134 \text{ сек}$$

Примечание: этот ответ получен в первом приближении, без учёта вращения Земли вокруг своей оси. (Все вычисления произведены относительно центра Земли, а не относительно её поверхности).

5. Как известно, небесное тело является незаходящим в каком либо месте, если в нижней своей кульминации оно находится не ниже линии горизонта:

$$h = \varphi - (90^\circ - \delta) \geq 0^\circ,$$

то есть

$$\delta \geq 90^\circ - \varphi.$$

Таким образом, для города Троицка нам нужно, чтобы небесное склонение кометы было

$$\delta \geq 34^\circ 30'.$$

Из таблицы эфемерид находим, что это условие выполняется с 3 марта по 18 апреля.

6. Максимальная высота светила, то есть точка верхней кульминации определяется по формуле:

$$h = \varphi - (90^\circ - \delta) \geq 0^\circ,$$

чем больше величина небесного склонения, тем выше поднимается небесное тело. Из таблицы находим, что эта максимальная величина небесного склонения у кометы Хейла-Боппа была 25 марта ($\delta_{\max} = 45^\circ 50'$). Время кульминации – около полудня. Действительно, прямое восхождение кометы в этот день ($\alpha = 00^{\text{h}}39^{\text{m}}$) практически совпадает с прямым восходом Солнца, которое в день весеннего равноденствия равно нулю и каждый день увеличивается примерно на 04^{m} , то есть его можно оценить как $\alpha_o = 00^{\text{h}}16^{\text{m}}$. Таким образом, можно оценить время кульминации кометы как $t_* = \alpha - \alpha_o = 00^{\text{h}}23^{\text{m}}$ после полудня (или в $12^{\text{h}}31^{\text{m}} + 00^{\text{h}}23^{\text{m}} = 12^{\text{h}}54^{\text{m}}$ Московского зимнего времени).

Высота кометы при этом была $h_{\max} = 45^\circ 50' + 90^\circ - 55^\circ 30' = 80^\circ 20'$. Конечно, в это (дневное) время комета видна не была, но в тёмное время суток её можно было прекрасно наблюдать.

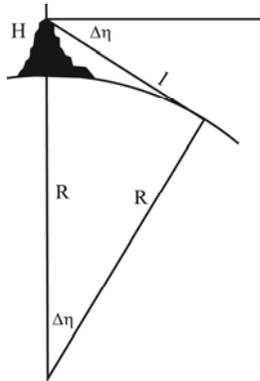
IV Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике

Решения задач теоретического тура

г. Троицк,
7-11 апреля

10 класс

1. В первом приближении (от уровня моря и без учёта рефракции), чтобы наблюдать небесные объекты хотя бы в точке их верхней кульминации, небесное склонение этих объектов должно быть больше $\delta_0 = \varphi - 90^\circ$. То есть, даже для самой южной точки Крыма (широта $44^\circ 24'$) δ_0 составляет $-45^\circ 36'$. С учётом рефракции можно увидеть объекты со склонением до $-46^\circ 36'$, но центр шарового скопления с $\delta = -47^\circ 30'$ всё же увидеть невозможно. Однако, нам может помочь подъём на гору. Действительно, при подъёме на высоту H положение видимого горизонта будет ниже на угол



$$\Delta\eta = \arctg\left(\frac{l}{R}\right),$$

где $R \approx 6400$ км – радиус Земли, а l находится из условия

$$l^2 = (R + H)^2 - R^2 = H \cdot (2R + H).$$

Поскольку $H \ll l \ll R$, то $l \approx \sqrt{2RH}$ и

$$\Delta\eta \approx \frac{l}{R} \approx \sqrt{\frac{2H}{R}} \quad (\text{в радианах}).$$

Для наивысшей точки Крыма (гора Роман-Кош, широта $\varphi_m = 44^\circ 36'$, высота над уровнем моря $H = 1545$ м) получаем $\Delta\eta \approx 0,022$ рад или $1^\circ 16'$. Таким образом, предельное небесное склонение, доступное для наблюдения из Крыма составит

$$\delta_m = 44^\circ 36' - 90^\circ - 1^\circ - 1^\circ 16' \approx -47^\circ 40'$$

а это ниже точки верхней кульминации центра шарового скопления ω Центавра, то есть пронаблюдать его можно.

2. Для того, чтобы хотя бы часть метеорита долетела до Земли, необходимо, чтобы его полной кинетической энергии не хватило бы на нагрев всего льда, его плавления, нагрев воды до температуры парообразования и превращения воды в пар, то есть:

$$\frac{mv^2}{2} \leq mc_{\text{л}}\Delta T_{\text{л}} + m\lambda + mc_{\text{в}}\Delta T_{\text{в}} + mr,$$

где m – масса метеорита, $\Delta T_{\text{л}}$ и $\Delta T_{\text{в}}$ – температуры, на которые нагреваются лёд и вода соответственно, то есть 50° и 100° .

$$v \leq \sqrt{2 \cdot (c_{\text{л}}\Delta T_{\text{л}} + \lambda + c_{\text{в}}\Delta T_{\text{в}} + r)},$$

$$v_{\text{max}} \approx \sqrt{2(2100 \cdot 50 + 330000 + 4200 \cdot 100 + 2300000)} \approx \sqrt{6310000},$$

откуда $v_{\text{max}} \approx 2,5$ км/с.

Заметим, что до поверхности Земли долетит именно твердый метеорит (лёд), поскольку все четыре описанных процесса происходят только для участков метеорита, близких к его поверхности, причём практически одновременно, и он уменьшается в размерах, оставаясь твёрдым. Таким образом, ситуация прилёта к земле "большой капли воды" невозможна.

3. Поскольку разность звёздных величин 8, то ясно, что главная звезда ($2M_{\odot}$) находится на главной последовательности, а спутник – белый карлик, масса которого не более M_{\odot} . По третьему закону Кеплера

$$\frac{(M+m) \cdot T^2}{a^3} = \text{const},$$

причём эта константа равна единице, если работать в системе единиц "а.е. – год – M_{\odot} ". Подставив $(2+1)M_{\odot}$ и 177 лет в эту формулу, получим, что $a \approx 50$ а.е. Поскольку 50 а.е. видно под углом $2,5''$, то расстояние в 1 а.е. видно под углом $0,05''$, то есть расстояние до звёзд составляет около 20 пк.

4. Полное солнечное затмение соответствует такому взаимному положению Луны и Солнца на нашем небе, при котором диск Луны полностью покрывает диск Солнца. Лунный диск движется относительно солнечного с определённой скоростью, в первом приближении равной

$$u \approx 360^\circ / 29,5 \text{ сут} \approx 0,51 \text{ угл.сек./сек.}$$

Очевидно, что максимальное время полного солнечного затмения будет в том случае, когда центр лунного диска проходит через центр солнечного. (Это и есть принцип выбора места наблюдения: множество точек на местности, при наблюдении из которых центр одного диска проходит через центр другого, называется линией центра полосы затмения.)

В этом случае время между вторым и третьим контактами (то есть началом и окончанием полного затмения) лунный диск пройдёт относительно солнечного угловое расстояние

$$\delta = 2(\rho_s - \rho_o) = 68''.$$

Время полного затмения составит

$$\tau = \frac{\delta}{u} = \frac{68''}{0,51''/\text{сек}} \approx 134 \text{ сек}$$

Этот ответ получен в первом приближении, без учёта вращения Земли вокруг своей оси. В результате суточного вращения поверхность Земли движется в том же направлении, что и лунная тень, поэтому относительно поверхности Земли скорость тени будет меньше, чем вычисленная нами (вычисления произведены относительно центра Земли, а не относительно её поверхности). Из этого следует, что реальное время затмения больше, чем только вычисленное.

Примечание-дополнение. Количественно это можно учесть следующим образом: скорость лунной тени относительно линии центр Земли – центр Солнца равна $v_1 = 2\pi R/T \approx 950$ м/с, а скорость Читинской области относительно той же линии $v_2 = 2\pi R \cdot \cos\varphi/t \approx 315$ м/с. (Здесь $R = 384000$ км – средний радиус лунной орбиты, $r = 6380$ км – радиус Земли, $T = 29,5$ сут – синодический период обращения Луны, t – одни сутки, $\varphi = 52^\circ$ – географическая широта).

Если бы затмение происходило в полдень, то для получения скорости движения тени по поверхности Земли можно было бы просто вычесть v_2 из v_1 . Однако, затмение происходит по всемирному времени в 01^{h} , по местному астрономическому времени в $01^{\text{h}} + 113^\circ / (15^\circ/\text{h}) \approx 08^{\text{h}} 32^{\text{m}}$, то есть примерно за 3 часа 28 минут до полудня, то есть Читинская область была расположена примерно на 52° от линии центр Земли – центр Солнца. Таким образом, скорость лунной тени составляла $v^* = v_1 - v_2 \cos 52^\circ \approx 780$ м/с.

Таким образом, более точная оценка даёт максимальную продолжительность затмения $\tau \approx 134 \text{ сек} (950/780) \approx 163 \text{ сек}$. Данная оценка практически совпадает с реальной величиной.

5. Понадобятся следующие данные, которые можно найти в таблице: эксцентриситет орбиты $e = 0,9951$ и расстояние от Солнца до точки перигелия: $p = 0,914$ а.е. Исходя из этих данных, легко найти большую полуось орбиты

$$a = \frac{p}{1-e} \approx 186,5 \text{ а.е.},$$

а зная её, по III закону Кеплера (сравнивая с обращением Земли вокруг Солнца)

$$T = T_3 \cdot a^{3/2} \approx 2550 \text{ лет.}$$

6. Максимальная высота светила, то есть точка верхней кульминации определяется по формуле:

$$h = \varphi - (90^\circ - \delta) \geq 0^\circ,$$

чем больше величина небесного склонения, тем выше поднимается небесное тело. Из таблицы находим, что эта максимальная величина небесного склонения у кометы Хейла-Боппа была 25 марта ($\delta_{\max} = 45^\circ 50'$). Время кульминации – около полудня. Действительно, прямое восхождение кометы в этот день ($\alpha = 00^{\text{h}}39^{\text{m}}$) практически совпадает с прямым восхождением Солнца, которое в день весеннего равноденствия равно нулю и каждый день увеличивается примерно на 04^{m} , то есть его можно оценить как $\alpha_0 = 00^{\text{h}}16^{\text{m}}$. Таким образом, можно оценить время кульминации кометы как $t_* = \alpha - \alpha_0 = 00^{\text{h}}23^{\text{m}}$ после полудня (или в $12^{\text{h}}31^{\text{m}} + 00^{\text{h}}23^{\text{m}} = 12^{\text{h}}54^{\text{m}}$ Московского зимнего времени).

Высота кометы при этом была $h_{\max} = 45^\circ 50' + 90^\circ - 55^\circ 30' = 80^\circ 20'$. Конечно, в это (дневное) время комета видна не была, но в тёмное время суток её можно было прекрасно наблюдать.

IV Российская олимпиада школьников по астрономии и космической физике

Решения задач теоретического тура

г. Троицк,
7-11 апреля

11 класс

1. Максимальное удаление звезды от центра галактики можно найти, используя закон сохранения энергии. Удаляясь от центра галактики, звезда теряет скорость, преодолевая силу притяжения галактики, то есть совершая работу против сил тяготения. Работа, совершенная звездой против силы тяготения в интервале от R_0 до R_g , равна площади трапеции, заключенной под прямолинейным участком графика зависимости силы от расстояния, то есть

$$A(R_0, R_g) = \frac{(R_g - R_0) \cdot (F_g - F_0)}{2},$$

где F_g и F_0 – значения силы притяжения на расстояниях R_g и R_0 соответственно. Легко понять, что на круговых орбитах

$$\frac{F_g}{m} = \frac{V_g^2}{R_g}, \quad \frac{F_0}{m} = \frac{V_0^2}{R_0},$$

где m – масса звезды. Работа, совершенная звездой против силы тяготения в интервале между R_g и R_{\max} (максимальным расстоянием от центра галактики), где гравитационная сила изменяется по закону $1/r^2$, равна разности значений потенциальной энергии

$$A(R_g, R_{\max}) = \frac{GMm}{R_g} - \frac{GMm}{R_{\max}},$$

где G – гравитационная постоянная, а M – полная масса галактики, с другой стороны, известно, что

$$GM = R_g \cdot V_g^2.$$

Тогда максимальное расстояние R_{\max} вычисляется с помощью выражения

$$\frac{mV_*^2}{2} = \frac{(R_g - R_0) \cdot (F_g - F_0)}{2} + GMm \left(\frac{1}{R_g} - \frac{1}{R_{\max}} \right);$$

$$V_*^2 = (R_g - R_0) \cdot \left(\frac{V_g^2}{R_g} + \frac{V_0^2}{R_0} \right) + 2V_g^2 \left(1 - \frac{R_g}{R_{\max}} \right)$$

Подставив в это выражение численные значения из условия задачи (при этом заметим, что в систему СИ переходить вовсе не обязательно), получим:

$$R_{\max} \approx 43,7 \text{ кпк}$$

Чтобы навсегда покинуть галактику, звезда должна иметь такую скорость V , чтобы

$$V^2 \geq (R_g - R_0) \cdot \left(\frac{V_g^2}{R_g} + \frac{V_0^2}{R_0} \right) + 2V_g^2$$

Вычисления дают, что критическая скорость:

$$v_2 \approx 483 \text{ км/с.}$$

2. Для того, чтобы хотя бы часть метеорита долетела до Земли, необходимо, чтобы его

полной кинетической энергии не хватило бы на нагрев всего льда, его плавления, нагрев воды до температуры парообразования и превращения воды в пар, то есть:

$$\frac{mv^2}{2} \leq mc_{\text{л}}\Delta T_{\text{л}} + m\lambda + mc_{\text{в}}\Delta T_{\text{в}} + mr,$$

где m – масса метеорита, $\Delta T_{\text{л}}$ и $\Delta T_{\text{в}}$ – температуры, на которые нагреваются лёд и вода соответственно, то есть 50° и 100° .

$$v \leq \sqrt{2 \cdot (c_{\text{л}}\Delta T_{\text{л}} + \lambda + c_{\text{в}}\Delta T_{\text{в}} + r)},$$

$$v_{\max} \approx \sqrt{2(2100 \cdot 50 + 330000 + 4200 \cdot 100 + 2300000)} \approx \sqrt{6310000},$$

откуда $v_{\max} \approx 2,5$ км/с.

Заметим, что до поверхности Земли долетит именно твердый метеорит (лёд), поскольку все четыре описанных процесса происходят только для участков метеорита, близких к его поверхности, причём практически одновременно, и он уменьшается в размерах, оставаясь твёрдым. Таким образом, ситуация прилёта к земле "большой капли воды" невозможна.

3. Поскольку разность звёздных величин 8, то ясно, что главная звезда ($2M_{\odot}$) находится на главной последовательности, а спутник – белый карлик, масса которого не более M_{\odot} . По третьему закону Кеплера

$$\frac{(M+m) \cdot T^2}{a^3} = \text{const},$$

причём эта константа равна единице, если работать в системе единиц "а.е. – год – M_{\odot} ". Подставив $(2+1)M_{\odot}$ и 177 лет в эту формулу, получим, что $a \approx 50$ а.е. Поскольку 50 а.е. видно под углом $2,5''$, то расстояние в 1 а.е. видно под углом $0,05''$, то есть расстояние до звёзд составляет около 20 пк.

4. Полное солнечное затмение соответствует такому взаимному положению Луны и Солнца на нашем небе, при котором диск Луны полностью покрывает диск Солнца. Лунный диск движется относительно солнечного с определённой скоростью, в первом приближении равной

$$v \approx 360^\circ/29,5 \text{ сут} \approx 0,51 \text{ угл.сек./сек.}$$

Очевидно, что максимальное время полного солнечного затмения будет в том случае, когда центр лунного диска проходит через центр солнечного. (Это и есть принцип выбора места наблюдения: множество точек на местности, при наблюдении из которых центр одного диска проходит через центр другого, называется линией центра полосы затмения.)

В этом случае время между вторым и третьим контактами (то есть началом и окончанием полного затмения) лунный диск пройдёт относительно солнечного угловое расстояние

$$\delta = 2(\rho_s - \rho_o) = 68''.$$

Время полного затмения составит

$$\tau = \frac{\delta}{v} = \frac{68''}{0,51''/\text{сек}} \approx 134 \text{ сек}$$

Этот ответ получен в первом приближении, без учёта вращения Земли вокруг своей оси. В результате суточного вращения поверхность Земли движется в том же направлении, что и лунная тень, поэтому относительно поверхности Земли скорость тени будет меньше, чем вычисленная нами (вычисления произведены относительно центра Земли, а не относительно её поверхности). Из этого следует, что реальное время затмения больше, чем только вычисленное.

Примечание-дополнение. Количественно это можно учесть следующим образом: Скорость лунной тени относительно линии центр Земли – центр Солнца равна $v_1 = 2\pi R/T \approx 950$ м/с, а скорость Читинской области относительно той же линии $v_2 = 2\pi r \cdot \cos\varphi/t \approx 315$ м/с. (Здесь $R = 384000$ км – средний радиус лунной орбиты, $r = 6380$ км – радиус Земли, $T = 29,5$ сут –

синодический период обращения Луны, t – одни сутки, $\varphi = 52^\circ$ – географическая широта).

Если бы затмение происходило в полдень, то для получения скорости движения тени по поверхности Земли можно было бы просто вычесть v_2 из v_1 . Однако, затмение происходит по всемирному времени в 01^{h} , по местному астрономическому времени в $01^{\text{h}} + 113^\circ / (15^\circ/\text{h}) \approx 08^{\text{h}}32^{\text{m}}$, то есть примерно за 3 часа 28 минут до полудня, то есть Читинская область была расположена примерно на 52° от линии центр Земли – центр Солнца. Таким образом, скорость лунной тени составляла $v_* = v_1 - v_2 \cos 52^\circ \approx 780$ м/с.

Таким образом, более точная оценка даёт максимальную продолжительность затмения $\tau \approx 134$ сек $\cdot (950/780) \approx 163$ сек. Данная оценка практически совпадает с реальной величиной.

5. Понадобятся следующие данные, которые можно найти в таблице: эксцентриситет орбиты $e = 0,9951$ и расстояние от Солнца до точки перигелия: $p = 0,914$ а.е. Исходя из этих данных, легко найти большую полуось орбиты

$$a = \frac{p}{1-e} \approx 186,5 \text{ а.е.},$$

а зная её, по III закону Кеплера (сравнивая с обращением Земли вокруг Солнца)

$$T = T_3 \cdot a^{3/2} \approx 2550 \text{ лет.}$$

6. Если ослабление, выраженное в звёздных величинах обозначить через A_b и A_v (для соответствующих диапазонов), то:

$$\begin{aligned} (B-V)_0 &= B_0 - V_0 = (B - A_b) - (V - A_v) = \\ &= (B - 2.5 \cdot \lg \alpha_b) - (V - 2.5 \cdot \lg \alpha_v) = (B - V) - 2.5(\lg \alpha_b - \lg \alpha_v) \approx \\ &\approx 0.22 - 2.5 \cdot (0.4 - 0.3) \approx 0.22 - 0.25 \approx -0.03 \end{aligned}$$

Это звезда класса А с температурой около 10000 К.