АСТРОНОМИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

VII Российская олимпиада школьников по астрономии и физике космоса

г. Белгород,
7-13 апреля 2000 г

URL: http://www.issp.ac.ru/iao/russia/2000/, e-mail: univer@issp.ac.ru

Решения задач 1-3 для 10-11 класса.

1. Нетрудно видеть, что из-за рефракции на Землю попадают те лучи Солнца, которые прошли бы мимо Земли, если бы свет распространялся в атмосфере прямолинейно. Значит, Земля просто перехватывает немного более широкий пучок солнечного света, чем перехватывала бы при отсутствии атмосферы. "Недополучает" энергию область пространства, расположенная за Землёй.

2. Для землян параллакс (годичный) какого-либо объекта – это (по определению) угловой размер большой полуоси земной орбиты (расположенной перпендикулярно направлению на объект), видимый с этого объекта. Очевидно, что для "зелёных человечков" параллакс Солнца – это угловой размер большой полуоси орбиты их планеты, видимой с Солнца. То есть, π = **a**/**L**, где π = 0,039" – параллакс Солнца, **L** = 120 св.лет - расстояние от звезды "зелёных человечков" до Солнца, **a** - большая полуось орбиты планеты "зелёных человечков". Тогда **a** = π·**L**. Период обращения планеты **T** можно определить из III Закона Кеплера. Учитывая, что звезда "зелёных человечков" по всем параметрам – в том числе и массе – аналогична Солнцу, получаем:

$$\mathbf{T/T_з = (a/a_з)^{3/2} = (\pi\cdot L/a_з)^{3/2},}$$

   где $\mathbf{T_з}$ и $\mathbf{a_з}$ - период обращения вокруг Солнца и большая полуось орбиты Земли.

   Считая, что год равен периоду обращения планеты вокруг звезды (вообще, это абсолютно верно только в том случае, когда нет прецессии оси собственного вращения планеты), получаем:

$$\mathbf{T = T_з\cdot(\pi\cdot L/a_з)^{3/2} =}$$

$$= 1 \text{ год} \cdot (0{,}039''/206265'' \cdot 120 \text{ лет} \cdot 365{,}25 \text{ сут/лет} \cdot 86400 \text{ сек/сут} \cdot 3\cdot10^8 \text{ м/сек} / 1{,}496 \cdot 10^{11} \text{ м})^{3/2} =$$

$$\mathbf{= 1\ год \cdot 1{,}44^{3/2} \approx 1{,}72\ года.}$$

   Вообще, удивительно, как там живут эти "зелёные человечки", это ведь почти орбита Марса, там должно быть довольно прохладно.

3. В таблице Солнечной системы находим радиусы Земли и Луны, их альбедо. Используя эти величины, получаем, что Земля в "полноземелье" светит в $(\alpha_з/\alpha_л)\cdot(R_зR_л)^2$ раз = 70 раз ярче, чем Луна в полнолуние, что соответствует разности звёздных величин 2,5·lg70 = 4,6, то есть звёздная величина Земли в "полноземелье" составляет:

$$\mathbf{-12{,}7^m - 4{,}6^m = -17{,}3^m.}$$

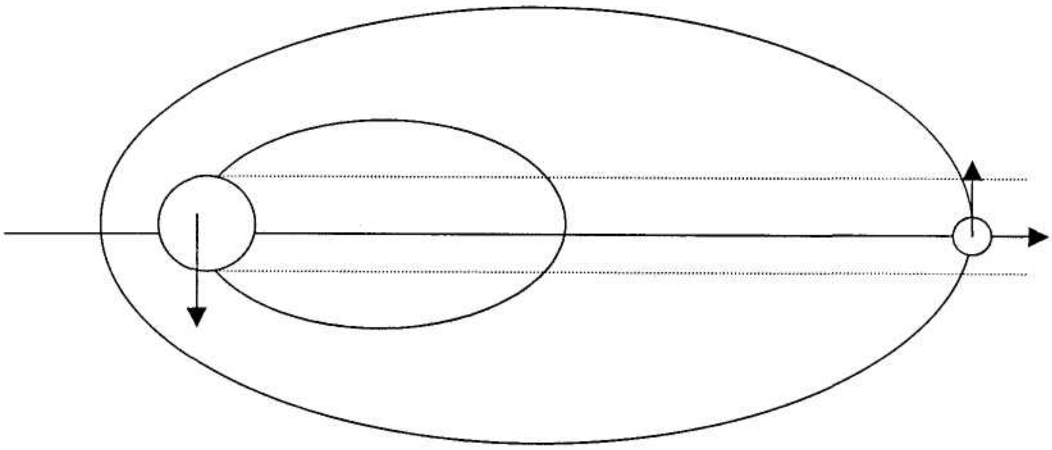
   Именно свет Земли в "полноземелье" освещает Луну в новолуние. Таким образом, если Солнце со звёздной величиной $-26{,}8^m$ является причиной блеска $-12{,}7^т$ Луны в полнолуние (разница $14{,}1^m$), то для новолуния аналогично получаем ответ:

$$-17{,}3^m + 14{,}1^m = -3{,}2^m.$$

Решения задач 4-6 для 11 класса.

4. Поскольку расстояние до ядра не превышает 10 килопарсек (это должно быть известно участникам Олимпиады), ожидаемый параллакс от ядра составляет не менее $1/10^4$, или 10^{-4} угловой секунды. Чтобы его можно было измерить, разрешающая способность радиоинтерферометра должна соответствовать этой величине.
   Разрешающая способность обусловлена дифракцией электромагнитных волн, и составляет $\beta \approx \lambda/D$ (если β выражено в радианах), или же $\beta \approx 2\cdot10^5\lambda/D$ (в угловых секундах). Из условия $\beta \approx 10^{-4}$ получаем $D \approx 2\cdot10^9\ \lambda$, что составляет около 20 тысяч километров. Размера Земли не хватает. Антенны следует располагать на околоземных орбитах.

5. Период обращения велик по сравнению со временем затмений. Это значит, что участки орбит, на которых происходят затмения, малы по сравнению с соответствующими расстояниями до общего фокуса (центра масс системы), следовательно, их можно считать прямолинейными, а скорости компонент на этих участках - постоянными. Кроме того, эти участки орбит расположены вблизи периастров и апоастров орбит. Так как в двойных системах эксцентриситеты орбит обеих звёзд равны, то выберем для рассмотрения одну из них.



Рассмотрим компонент меньшего размера (см. рис.) во время прохождения по диску второй звезды. Пунктиром очерчена зона, проецирующаяся на вторую звезду для бесконечно удаленного наблюдателя. Центры обеих звёзд всегда будут находиться на одной прямой - по разные стороны от центра масс системы (фокуса орбит). Поэтому скорости движения звёзд по орбитам обратно пропорциональны их массам: $k = m_1/m_2 = v_2/v_1$ (относительно центра масс). Отсюда время прохождения второй звезды по диску первой

$$T_2 = D_1/(v_1+v_2) = (l+k)D_1/v_1,$$

где v_1, v_2, D_1 - скорости звезд в апоастрах своих орбит и диаметр большой звезды.

Аналогично поступаем с затмением второй звезды первой звездой:

$$T_1=D_1/(u_1+u_2) = (l+k)D_1/u_1$$

где u_1, u_2 – скорости звёзд в периастрах своих орбит. Соотношения между скоростями в периастре и апоастре найдём из II закона Кеплера (или из закона сохранения момента импульса) каждой из звёзд. Достаточно рассмотреть одну из них, например, первую. Для неё будем иметь:

$$u_1 R_1 = v_1 r_1$$

где R_1 и r_1 — расстояния от первой звезды до центра масс в периастре и апоастре.
Отсюда: $u_1/v_1 = (1+e)/(1-e)$, где e - искомый эксцентриситет. Значит:

$$T_2/T_1 = u_1/v_1 = (1+e)/(1-e), \quad \text{или} \quad e = (T_2-T_1)/(T_1+T_2).$$

Подставляя значения T_2 и T_1, получаем ответ:

$$\mathbf{e = 0{,}13.}$$

Примечание: Утверждение о прямолинейности участков орбит даёт ошибку порядка 2%. Это примерно 10 минут от T_1 и T_2, данных в условии задачи. Поэтому такое приближение вполне оправдано.

6. Газ в ядре представляет собой смесь электронов и ионизованных атомов (ионов). Полное давление газа в звезде равно сумме давления электронного газа P_e и ионного газа $P_и$, то есть $P = P_e + P_и$.
Для идеальных газов

$$P_e = n_e kT,$$
$$P_и = n_и kT,$$
$$P = (n_e + n_и)kT,$$

где n_e и $n_и$ - концентрации электронов и ионов соответственно. Для оценки их относительных значений учтём, что в нейтральном атоме число протонов и электронов равны. Поскольку все атомы полностью ионизованы, на каждый атом приходится столько свободных электронов, сколько протонов содержит его ядро, то есть, каждый атом водорода дает один электрон, гелия - 2, а углерода - 6 электронов. Поэтому, если обозначить через $n_н$, n_{He} и n_c концентрации ионов водорода, гелия и углерода соответственно, то полные давления $P_e + P_и$ будут равны:
для водородо-гелиевого ядра звезды:

$$P_1 = (n_н + n_{He})\, кT_1 + (n_{He} + 2n_{He})\, кT_1 - (2n_н + 0{,}3\, n_н)\, кT_1 = 2{,}3\, n_н\, kT_1,$$

а для углеродного ядра:

$$P_2 = (n_c + 6n_c)\, kT_2 = 7\, n_c\, kT_2.$$

Теперь надо найти связь между концентрациями $n_н$ и n_c. По условию задачи, плотности вещества в ядрах двух звёзд одинаковы. Поскольку практически вся масса вещества находится в ядрах атомов, плотность ρ каждого вещества равна концентрации ионов, умноженной на массу иона, которая пропорциональна атомному весу элемента. Таким образом получаем:

$$A_H \cdot n_н + A_{He} \cdot n_{He} = A_c \cdot n_c \quad \text{или} \quad n_н \cdot (1 + 4\cdot 0{,}1) = 12\, n_c, \quad \text{откуда } n_H \approx 8{,}6\, n_c.$$

Наконец, из равенства давлений $P_1 = P_2$, получаем:

$$2{,}3 \cdot n_H \cdot kT_1 = 7 \cdot n_c \cdot kT_2.$$

Сокращая k и учитывая, что $n_н \sim 8{,}6\, n_c$, получаем, что $T_2 \approx 2{,}8\, T_1$.
Ответ: ядро углеродной звезды имеет температуру $5{,}6\cdot 10^7$ К.

Решения задачи 4 для 10 класса и задач 5-6 для 9-10 класса.

4. В таблице Солнечной системы находим следующие величины для Венеры:
   $P_0 = 9\cdot10^6$ Па – атмосферное давление у поверхности Венеры,
   $M_B = 4{,}87\cdot10^{24}$ кг – масса Венеры,
   R_B = $6{,}05\cdot10^6$ м – радиус Венеры.

   Атмосферное давление $\mathbf{P_0}$ у поверхности планеты есть не что иное, как вес атмосферы, распределённый на всю поверхность планеты. Вес атмосферы складывается из веса всех её молекул, а вес каждой молекулы равен силе притяжения её к планете, то есть произведению её массы (m) на ускорение силы тяжести (g) *в той точке, где находится эта конкретная молекула* (mg). Вообще, ускорение силы тяжести уменьшается с высотой и одни и те же молекулы на большой высоте весят меньше. Однако, сделаем приближение, что ускорение силы тяжести примерно одинаково на всей толщине атмосферы – действительно, большая часть атмосферы сосредоточена в слое порядка десятка километров, где относительное изменение g составляет порядка 1/300. Поэтому, если обозначить массу всей атмосферы через M, то:

   $$\mathbf{P_0 = Mg_B/4\pi R_B^2}, \quad \text{где} \quad \mathbf{g_B = G\cdot M_B/R_B^2}$$

   откуда $$\mathbf{M = 4\pi R_B^2 P_0/g_B = 4\pi R_B^4 P_0/GM_B}$$

   Подставляя численные данные, получаем: **$M = 4{,}7\cdot10^{20}$ кг.**

5. Будем считать, что у планеты Леониды такие же размер, масса и период собственного вращения, как у Земли. Тогда радиус орбиты звездолёта составлял около R = 2000 км + + 6380 км = 8380 км (поскольку расстояние до корабля 2 Мм = 2000 км было в тот момент, когда звездолёт находился в зените). Из III закона Кеплера следует, что период спутника зависит от радиуса орбиты как $R^{3/2}$. *[Можно обойтись и без III закона Кеплера, просто рассмотрев движение корабля по круговой орбите.]* Известно, что на низкой околоземной орбите (на высотах 180 - 280 км) период обращения спутника составляет 88 - 90 минут, значит на орбите звездолёта он составит

   $$T = 90 \text{ мин} \cdot (8380/6660)^{3/2} \approx 127 \text{ мин} \approx 2{,}1 \text{ часа}.$$

   [Другие способы: просто найти период обращения по формуле $T = 2\pi(R/g_R)^{1/2}$ или же брать в качестве исходного данного теоретический период для нулевой высоты $T_o = 2\pi(R/g_o)^{1/2}$ = 84 минуты.]

   Через это время звездолёт вновь пройдёт через зенит той точки экватора Леониды, где был Комов, но его там уже не будет: вращение планеты переместит его к востоку примерно на 32°. ($360° \cdot 2{,}1^ч/24^ч \approx 32°$). Будет ли находиться корабль в прямой видимости Комова? Без вычислений это определить нельзя. Найдём, каков может быть минимальный радиус орбиты «Подсолнечника», чтобы Комов видел его хотя бы на горизонте. Рассмотрим прямоугольный треугольник с прямым углом в точке, где находится Комов, и углом 32° в центре планеты. *[При разборе нарисовать чертёж.]* Тогда минимальный радиус орбиты «Подсолнечника», когда тот будет виден Комову. составит $R_Л$ / cos 32° ≈ 6380 / 0,848 ≈ 7520 км, это меньше реального радиуса орбиты в 8380 км. Поэтому звездолёт в любом случае окажется в пределах видимости Комова и с ним можно будет связаться.

   Примечание: неверно оперировать расстояниями и пользоваться формулой $L = (2Rh)^{1/2}$

для нахождения расстояния (до горизонта) в данном случае. Эта формула применима только для малых h по сравнению с R и малых углов (много меньше радиана). В нашем случае это далеко не так (h сравнимо с R, а угол составляет более половины радиана).

6. По соотношению длин осей видимого эллипса орбиты Земли вычисляем, «под каким углом» на нас смотрели; таким образом находим эклиптическую широту места расположения наблюдателя (с точностью до знака). *[На разборе задач объяснить,* что *такое эклиптические координаты. Вообще говоря, при решении можно и обойтись без их употребления.]* Действительно:

$$\sin \varphi = b/a$$

Заметим, что для этого лучше всего брать именно орбиту Земли:
во-первых, потому что мы работаем с эклиптикой именно земной орбиты (плоскости орбит других планет несколько отличаются);
во-вторых, как наибольшую орбиту с пренебрежимо малым эксцентриситетом. Для орбиты Венеры точность будет меньше, а у Марса эксцентриситет орбиты существенен (У Меркурия тем более – и эксцентриситет орбиты весьма велик, и точность ещё меньше.)
Измерения осей дают примерно (с точностью до 0,5 мм) b = 14,5 мм и a = 50,5 мм.

$$\varphi = \arcsin b/a \approx \arcsin 14{,}5/50{,}5 \approx \arcsin 0{,}29 \approx 17°.$$

На рисунке Земля находится точно «за Солнцем», это означает, что с Земли «зелёные человечки» и Солнце видны на одной и той же эклиптической долготе. Поскольку ситуация соответствует положению Солнца за неделю до точки весеннего равноденствия (для землян), то эклиптическая долгота места расположения «зелёных наблюдателей» составляет примерно $23^h\ 30^m$ (можно и не вычислять этого, просто отметив на карте звёздного неба точку, где 15 марта находится Солнце). По карте звёздного неба находим, что на нас смотрели либо из Пегаса, либо из Водолея.

Решения задач 1-4 для 8-9 класса и задач 5-6 для 8 класса.

1. Нетрудно видеть, что из-за рефракции на Землю попадают те лучи Солнца, которые прошли бы мимо Земли, если бы свет распространялся в атмосфере прямолинейно. Значит, Земля просто перехватывает немного более широкий пучок солнечного света, чем перехватывала бы при отсутствии атмосферы. "Недополучает" энергию область пространства, расположенная за Землёй.

2. Продолжительность затмения звёзд Луной тем продолжительнее, чем больше угловой размер её диска и чем меньше угловая скорость её перемещения по небу. По второму закону Кеплера линейная скорость Луны меньше в апогее, чем в перигее в R_a/R_p раз. Угловая скорость пропорциональна V/R, поэтому она в апогее меньше в $(R_a/R_p)^2$ раз. Поэтому, хотя видимый диаметр Луны в апогее меньше в (R_a/R_p) раз, это не компенсирует более значительного уменьшения угловой скорости. Поэтому наиболее продолжительные затмения будут, когда Луна в апогее.

   Другое решение: Поскольку в перигее и апогее Луна движется практически перпендикулярно лучу зрения, самая большая продолжительность затмения равна тому промежутку времени, за которое Луна переместится на свой диаметр. Поскольку линейная скорость Луны (как небесного тела, движущегося в пространстве) меньше в апогее в (R_a/R_p) раз, во столько же раз больше будет и продолжительность затмений.

   Из других условий следует, во-первых, упомянуть, что затмение должно быть центральным. Кроме того, наблюдатель также движется со скоростью в несколько сотен м/с вследствие осевого вращения Земли. В результате затмение будет длиннее, если вектор скорости этого движения направлен в ту же сторону, что и вектор орбитальной скорости Луны, поскольку в этом случае скорость Луны относительно наблюдателя будет минимальной. Это будет иметь место, когда на долготе наблюдателя Луна близка к кульминации.

3. По сравнению с тем, что происходит на Земле, на Марсе будут два главных отличия:
   1. Видимый угловой диаметр Солнца примерно в 1,5 раза меньше.
   2. Вращение Марса вокруг своей оси немного медленнее.

   В таблице Солнечной системы находим диаметр Солнца и расстояние от Солнца до Марса (d= 1,392 млн.км, L – 227,9 млн.км), используя эти данные, вычисляем угловой диаметр Солнца: $\mathbf{d/L = 6{,}11\cdot10^{-3}}$ **рад,**
   в градусах это составляет $\mathbf{6{,}108\cdot10^{-3}\cdot180/\pi = 0{,}350°}$,
   в угловых минутах: $\mathbf{6{,}108\cdot10^{-3}\cdot60\cdot180/\pi = 21{,}0'}$.
   Для оценки величины продолжительности захода Солнца на экваторе Марса можно просто посчитать, за какое время Марс повернётся на эти 0,35° или 21':

   $$\boldsymbol{\tau \approx T \cdot 0{,}35° / 360° \approx 1{,}436} \textbf{ мин} \approx \textbf{1 мин 26 сек.}$$

   где $\mathbf{T} = 24^h37^m23^c = 24{,}623^h = 88643^c$ - период обращения Марса вокруг своей оси. Более точный ответ можно получить, учитывая, что правильнее брать не сидерический, а синодический период обращения Марса вокруг собственной оси (это аналогично тому, что на Земле сутки – синодический период – длятся ровно 24 часа, а период обращения – сидерический период – равен 23 часам 56 минутам):

$$\mathbf{T_{син} = T\cdot\tau/(\tau - T) \approx 88776\ сек.}$$

Однако, эта поправка в 133 секунды составляет всего лишь 0,15 %. Правильный ответ на ≈+T/τ = 0,15 % больше, чем только что вычисленный нами, но с нашей точностью вычислений это не принципиально.

4. Поскольку звездолёт проходил через зенит, расстояние до него было как раз *2* млн метров, или 2000 км. Объект размером в 1,5 км виден с такого расстояния под углом 3438'·1,5/2000 = 2,6'. [Такой угловой размер, кстати, имеет копейка с расстояния в 20 м.] Заметим, что звездолёт показался Комову «пятнышком», а не «звёздочкой», т.е. представлялся ему объектом со вполне различимым угловым размером, обычно это бывает тогда, когда угловой размер превосходит разрешающую способность глаза как минимум почти в два раза. Это говорит о том, что разрешение глаза Комова было по крайней мере примерно в два раза лучше, чем 2,6', то есть не хуже 1,3' - 1,5'. Это значит, что зрение у него было (как минимум) вполне хорошим.

5. Когда на Земле полнолуние, с Луны видна темная половина Земли (Новоземелье), а когда для нас наступает Новолуние, к Луне обращена освещенная часть Земли, и на Луне – Полноземелие. Период смены фаз останется таким же как и для Луны, то есть 29,53 земных суток, или одни лунные сутки.

6. Очевидно, «теоретический минимум» времени ожидания ответа – это время, за которое сигнал дойдет до Земли и ответный сигнал вернётся обратно. За 5 часов = 18000 секунд свет проходит расстояние 300 000 км/с · 18000 с = 5 400 000 000 км = 5,4 млд км. Значит, расстояние от Земли до неизвестной планеты составляет 2,7 млн.км. По таблице Солнечной системы находим, что этому условию удовлетворяет только Уран, расстояние до которого от Земли может быть от 2 586 млн.км до 3 153 млн.км.