Всероссийская олимпиада школьников по астрономии – 2015

Региональный этап

Задачи и решения

<u>**9 класс**</u>

1. Условие. Какое из трех тел быстрее пролетает свой собственный диаметр – Луна (при вращении вокруг Земли), Земля (при вращении вокруг Солнца) или Солнце (при вращении вокруг центра Галактики)?

1. Решение. Время пролета собственного диаметра D для тела составляет

$$T = \frac{D}{v} = \frac{2R}{v},$$

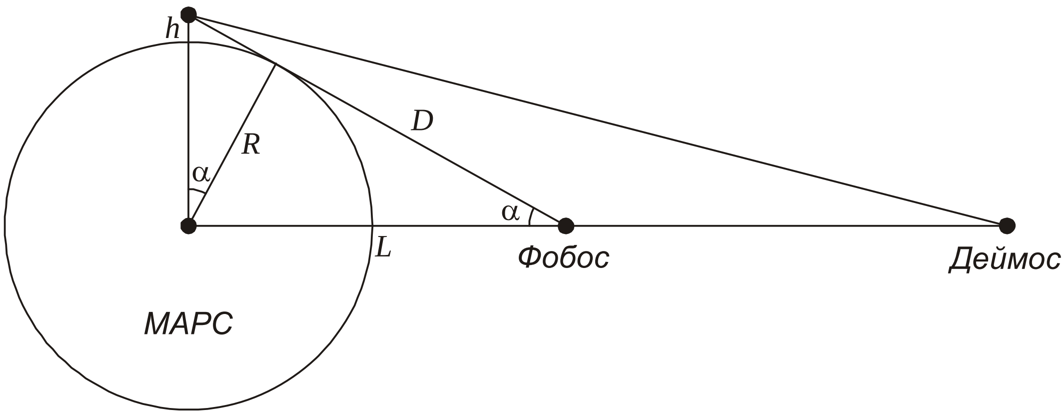
где v – скорость тела, R – его радиус. Проведем вычисления для Луны, Земли и Солнца и запишем результаты в таблицу:

Объект	Радиус	Диаметр	Скорость	Время пролета
Луна	1738 км	3476 км	1.023 км/с	3398 с
Земля	6378 км	12756 км	29.8 км/с	428 с
Солнце	695000 км	1390000 км	230 км/с	6000 с

Быстрее всех свой диаметр пролетает Земля.

2. Условие. На Марсе решено построить вышку, с которой всегда были бы видны его спутники Фобос и Деймос. Какова минимальная высота такого строения? Куда его лучше всего поставить? Атмосферной рефракцией и ослаблением света, угловыми размерами и наклоном орбит спутников к плоскости экватора Марса пренебречь.

2. Решение. Коль скоро мы пренебрегаем наклоном орбит спутников к экватору Марса (в действительности он очень мал, порядка 1°), спутники обращаются вокруг Марса в плоскости его экватора. Периоды вращения спутников не совпадают с осевым периодом вращения Марса, и в разное время они будут располагаться над разными меридианами Марса. Так как стоит задача постоянного наблюдения спутников с вышки, ее имеет смысл строить там, где нижняя кульминация спутников происходит наименее глубоко под горизонтом. Этому условию в пределе удовлетворяют полюса Марса, где спутники будут располагаться на постоянной глубине под горизонтом. Находись они бесконечно далеко от планеты, они появились бы на горизонте при наблюдении с поверхности. Но в реальности спутники (особенно Фобос) близки к Марсу и оказываются ниже вследствие эффекта суточного параллакса.



Обозначим радиус Марса через R, радиус орбиты Фобоса через L, минимальную высоту вышки через h. Из рисунка мы можем записать соотношение

$$\cos\alpha = \frac{D}{L} = \frac{\sqrt{L^2 - R^2}}{L} = \frac{R}{R+h}.$$

Отсюда мы получаем выражение для минимальной высоты вышки:

$$h = \frac{LR}{\sqrt{L^2 - R^2}} - R = R\left(\frac{1}{\sqrt{1-(R/L)^2}} - 1\right).$$

Подставляя численные данные для Марса и Фобоса, получаем значение высоты: 247 км. С вершины такой башни всегда будет виден Фобос и, очевидно, Деймос, так как он расположен дальше, и его суточный параллакс меньше (см. рисунок).

3. Условие. Синодический период некоторой планеты Солнечной системы относится к одному земному году так же, как один земной год – к сидерическому периоду этой планеты. Что это за планета?

3. Решение. В условии задачи не сказано, является планета внутренней или внешней. Поэтому запишем выражение для синодического периода планеты S в общем виде:

$$S = \frac{T\,T_0}{|T - T_0|}.$$

Здесь T и T_0 – орбитальные периоды планеты и Земли. По условию задачи

$$\frac{S}{T_0} = \frac{T}{|T - T_0|} = \frac{T_0}{T}.$$

Отсюда мы получаем уравнения:

$$T^2 - TT_0 + T_0^2 = 0;\ \ T>T_0;$$
$$T^2 + TT_0 - T_0^2 = 0;\ \ T<T_0.$$

Первое из этих уравнений не имеет положительных корней, из чего можно сразу сделать вывод, что эта планета не может быть внешней. Для второго уравнения имеем

$$T = T_0 \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 225 \text{ сут}.$$

Эта планета – Венера.

4. Условие. Сколько часов пройдет по маятниковым часам, доставленным с Земли, за одни солнечные сутки на Луне? На Марсе?

4. Решение. Период колебаний маятника равен

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi R\sqrt{\frac{l}{GM}}.$$

Здесь l – длина маятника, g – ускорение свободного падения на поверхности тела, R и M – его радиус и масса. Обозначим период этого маятника на Земле как t_0. За время T_0 (одни солнечные сутки) на Земле маятник сделает $N_0 = T_0/t_0$ колебаний. Число колебаний маятника на другом небесном теле за время T (местные солнечные сутки) будет равно

$$N = \frac{T}{t} = N_0 \frac{T}{T_0} \cdot \frac{R_0}{R} \sqrt{\frac{M}{M_0}}.$$

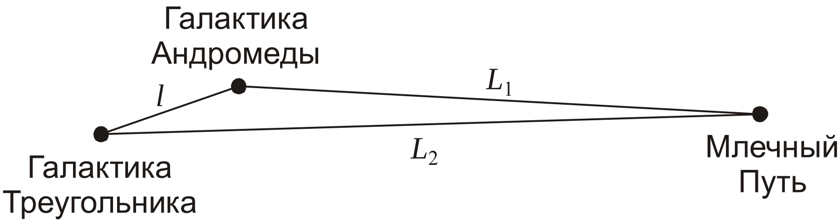
Здесь R_0 и M_0 – радиус и масса Земли. Число часов, которое отсчитает маятник, составит

$$H = 24 \frac{T}{T_0} \cdot \frac{R_0}{R} \sqrt{\frac{M}{M_0}}.$$

Заметим, что T – это солнечные сутки, длящиеся 29.53 земных суток на Луне и 24.66 земных часов на Марсе. За это время маятник отсчитает 288.4 часа (около 12 суток) на Луне и 15.18 часов на Марсе.

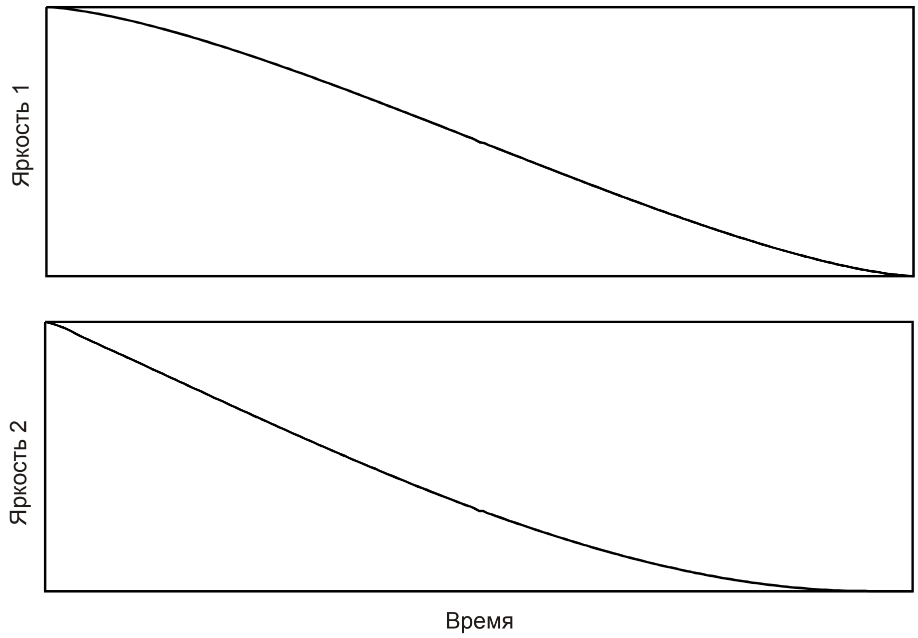
5. Условие. Расстояние до галактики Андромеды (M31) – 770 кпк, до галактики Треугольника (M33) – 900 кпк. Предположим, в этих двух галактиках и Галактике Млечный Путь одновременно вспыхнули одинаковые Сверхновые звезды. В какой из трех галактик раньше удастся зарегистрировать все три вспышки? Межзвездное поглощение не учитывать.

5. Решение. Галактики Андромеды и Треугольника вместе с нашей Галактикой Млечный Путь – главные представители Местной группы галактик. На нашем небе галактики Андромеды и Треугольника располагаются достаточно близко друг к другу, что можно понять уже по их созвездиям, граничащим друг с другом. Учитывая, что расстояния до них также схожи, можно сделать вывод, что эти галактики располагаются по соседству и в пространстве. Изобразим схему взаимного расположения трех галактик:

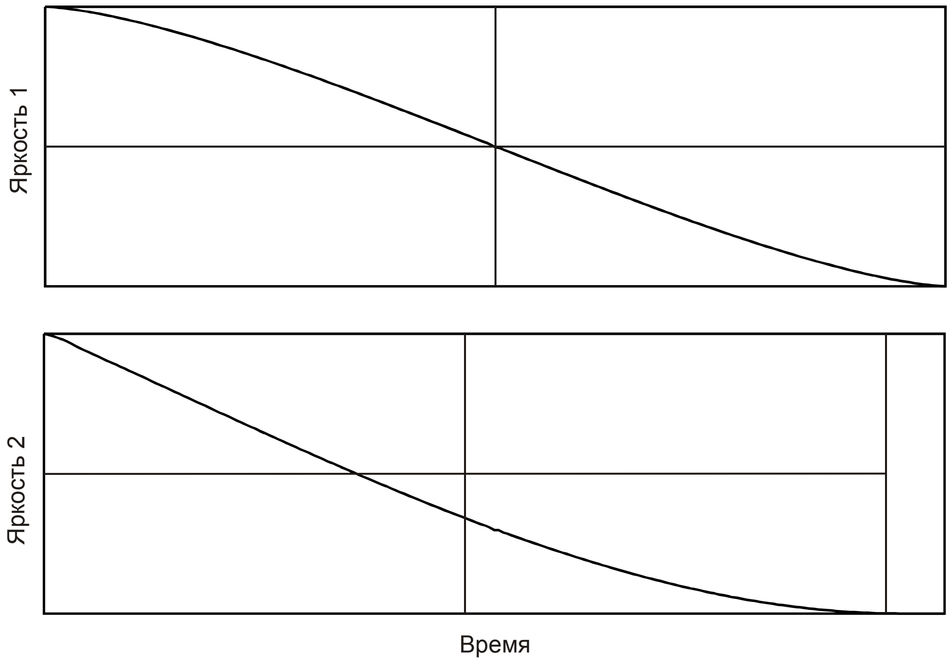


Обозначим расстояния от Млечного пути до галактик Андромеды и Треугольника как L_1 и L_2, а расстояние между этими галактиками – как l. Заметим, что последняя величина существенно меньше первых двух. В получившемся треугольнике самой большой стороной будет отрезок от Млечного Пути до галактики Треугольника L_2. Сверхновую, вспыхнувшую в Галактике Треугольника, мы сможем зарегистрировать только через время L_2/c, где c – скорость света. То же относится к нашей Сверхновой, свет от которой будет долго идти до галактики Треугольника. А вот галактика Андромеды находится на меньшем расстоянии от обеих других галактик, и через время L_1/c там могут быть зафиксированы все три Сверхновые.

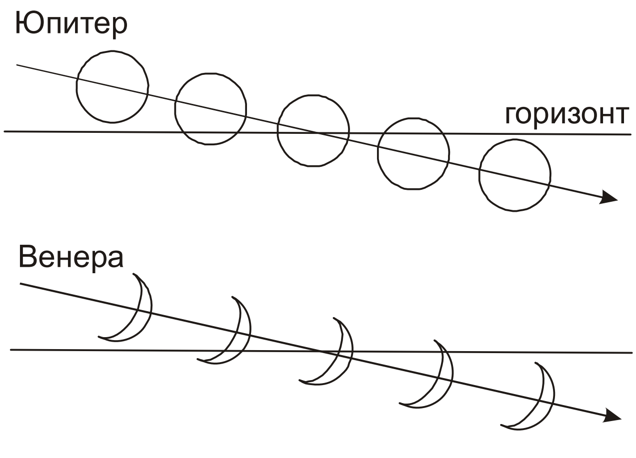
6. Условие. На графиках приведены зависимости видимой яркости Венеры и Юпитера при их заходе за горизонт. Шкалы яркости обоих графиков отличаются. Определите, какой график соответствует Венере, а какой – Юпитеру. Объясните свой вывод. Атмосферное ослабление света и рельеф горизонта не учитывать.



6. Решение. По графикам мы видим, что яркость двух планет при их заходе за горизонт убывала по-разному. У первой планеты яркость убывала симметрично относительно середины интервала: в середине видимая яркость была равна половине полной яркости до захода. Это характерно для объектов, имеющих симметричную форму – полный диск.



У второй планеты профиль убывания яркости несимметричный: к середине захода яркость уменьшилась более чем в 2 раза. Такое может быть, если форма светящегося объекта несимметрична, в частности, если объект имеет форму серпа.

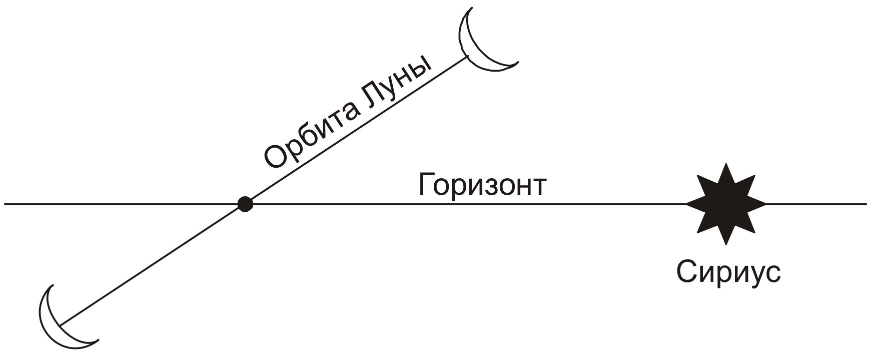


Следовательно, профиль 1 в условии относится к Юпитеру, профиль 2 – к Венере, которая является внутренней планетой и может выглядеть как серп.

10 класс

1. Условие. В календаре одного народа новый день начинался с восходом Сириуса, новый месяц – когда впервые Луна восходит позже Сириуса, а новый год – когда Сириус впервые появляется перед восходом Солнца (все относится к столице государства этого народа в тропическом поясе Земли). Сколько в среднем дней (отсчитываемых этим народом) содержит один месяц и один год в таком календаре? Прецессией лунной орбиты и земной оси, собственным движением Сириуса пренебречь. Считать, что астрономы этого народа имели возможность наблюдать Луну и Сириус днем.

1. Решение. Промежуток времени между двумя последовательными восходами одной далекой звезды (не Солнца) есть одни звездные сутки S, равные 23 часа 56 минут 04 секунды или 0.99727 обычных суток. Если пренебречь прецессией лунной орбиты, то на ней можно выделить одну точку, которая будет восходить над горизонтом в момент восхода Сириуса:

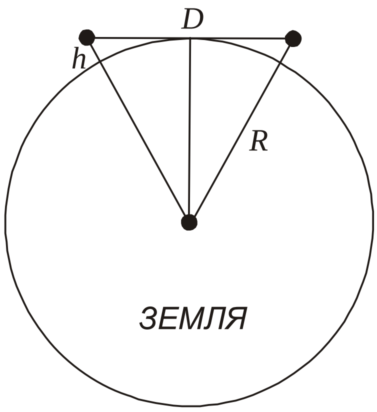


Очевидно, что новый месяц начнется после того, как Луна пройдет через эту точку (с ближайшим восходом Луны). Средняя продолжительность месяца составит период между двумя прохождениями Луны через эту точку. Это есть сидерический (звездный) период Луны T, равный 27.32 суток. Аналогичная ситуация будет с годом – он начнется после того, как Солнце в своем видимом пути по эклиптике пройдет точку, восходящую вместе с Сириусом. Период между двумя такими моментами есть сидерический (звездный) год T_0. Так как по условию задачи мы пренебрегаем прецессией земной оси, длительность сидерического года можно считать равной обычному году – 365.24 суток. В итоге, число дней в месяце и годе такого календаря в среднем составит

$$N = \frac{T}{S} = 27.4; \quad N_0 = \frac{T_0}{S} = 366.24.$$

2. Условие. Древняя цивилизация построила на Земле (включая океаны) сеть сигнальных башен высотой 30 метров. С верхней площадки каждой башни были видны верхние площадки, по крайней мере, двух соседних башен. Зажигая на ней огни определенного цвета, можно было быстро передавать на большие расстояния весть об опасности. За какое минимальное время такую информацию можно было распространить по всей Земле, если время реакции солдата на башне, зажигающего огни, составляет 10 секунд? Атмосферным ослаблением света, рефракцией и рельефом Земли пренебречь.

2. Решение. Для решения задачи определим максимальное расстояние между двумя соседними башнями, чтобы с вершины одной из них можно было видеть вершину другой.



С учетом того, что высота башни h существенно меньше радиуса Земли R, получаем:

$$D = 2\sqrt{(R+h)^2 - R^2} \approx 2\sqrt{2Rh} = 39.1 \text{ км}.$$

Через время t (10 секунд) на соседней башне также загорится сигнальный огонь. В итоге, скорость передачи информации v составит почти 4 км/с. Определим, за какое время эта информация достигнет противоположной точки Земли, предполагая, что все передающие ее башни располагаются на одном большом круге:

$$T = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi R t}{D} = \frac{\pi t}{2}\sqrt{\frac{R}{2h}} = 5100 \text{ с}$$

или 1.4 часа. Данный способ, очевидно, наиболее быстрый для цивилизаций, не располагающих радиосвязью и возможностью запуска космических аппаратов.

3. Условие. Астрономы наблюдали далекую звезду, физически похожую на Солнце, и зафиксировали падение ее яркости на 0.1% в течение 5 часов, вызванное прохождением по ее диску планеты. Найдите расстояние между планетой и звездой, считая орбиту планеты круговой. Определите размер планеты, считая, что она прошла по центру диска звезды. На какую планету Солнечной системы похожа эта далекая планета по размерам?

3. Решение. Планета прошла по центру диска звезды, отчего видимая яркость звезды уменьшилась на 1/1000 часть. Наблюдения ведутся с расстояния, много большего радиуса орбиты планеты, поэтому можно считать, что соотношение видимых размеров звезды и планеты такое же, как соотношение их истинных размеров. Тогда мы можем определить радиус планеты:

$$r = \frac{R}{\sqrt{1000}} \approx 0.03\,R.$$

Здесь R – радиус звезды, который по условию задачи близок к радиусу Солнца. Радиус планеты оказывается равен 22 тысячи км, то есть планета по размерам напоминает Уран и Нептун.

Вновь учитывая, что наблюдения происходят издалека, отметим, что длительность прохождения планеты T есть ни что иное, как время, за которое планета в своем орбитальном движении пролетает расстояние, равное диаметру звезды. Отсюда мы получаем скорость планеты:

$$v = \frac{2R}{T} \approx 80\ \text{км/с}.$$

Эта величина по сути – первая космическая скорость на заданном расстоянии от звезды. Так как эта звезда схожа с Солнцем и по размерам, и по массе, мы можем легко определить радиус орбиты планеты в астрономических единицах, сравнив ее орбиту с земной:

$$\frac{d}{d_0} = \frac{v_0^2}{v^2} = 0.15.$$

Здесь d_0 – расстояние от Земли до Солнца (астрономическая единица), v_0 – орбитальная скорость Земли.

4. Условие. Собственное движение звезды за 1 год равно ее годичному параллаксу. Определите тангенциальную скорость звезды (в км/с) относительно Солнца.

4. Решение. По определению, годичный параллакс звезды π – это угол, под которым с этой звезды виден отрезок r, равный среднему расстоянию Земли от Солнца (1 а.е). Если выразить расстояние от Солнца до звезды L в парсеках, а параллакс – в угловых секундах, то

$$\pi'' = 1\ \text{а.е.} / L\ (\text{пк}).$$

Собственное движение μ – это угловая скорость движения звезды по небу. Если за время T звезда прошла расстояние D перпендикулярно лучу зрения, то

$$\mu'' = D\ (\text{а.е.}) / L\ (\text{пк})\ T.$$

По условию задачи перемещение звезды за время T, равное 1 году

$$\mu''\text{T} = \pi'',$$

отсюда получается, что за это время звезда прошла расстояние D, равное 1 а.е. В этом можно также напрямую убедиться из определения данных величин. Тангенциальная скорость звезды по отношению к Солнцу равна

$$v_\text{T} = D / T = 1\ \text{а.е.} / 1\ \text{год} = 1.5\cdot10^8\ \text{км} / 3.156\cdot10^7\ \text{с} = 4.74\ \text{км/с}.$$

5. Условие. В одной из книг по астрономии было сказано, что яркость зодиакального света на расстоянии 30°-35° от Солнца равна суммарной яркости 7-8 звезд 5^m на один квадратный градус. Переведите величину яркости в звездные величины с квадратного градуса. Сравните численно полученную величину со средней поверхностной яркостью Туманности Андромеды. Считать туманность прямоугольной с угловым размером 190'×60', ее интегральная звездная величина равна 3.4^m.

5. Решение. Освещенность от одной звезды 5^m в 100 раз меньше, чем от звезды 0^m. Если звезд не одна, а 7-8 (допустим, 7.5), то освещенность будет уже в 100/7.5=13.3 раз меньше. Согласно формуле Погсона:

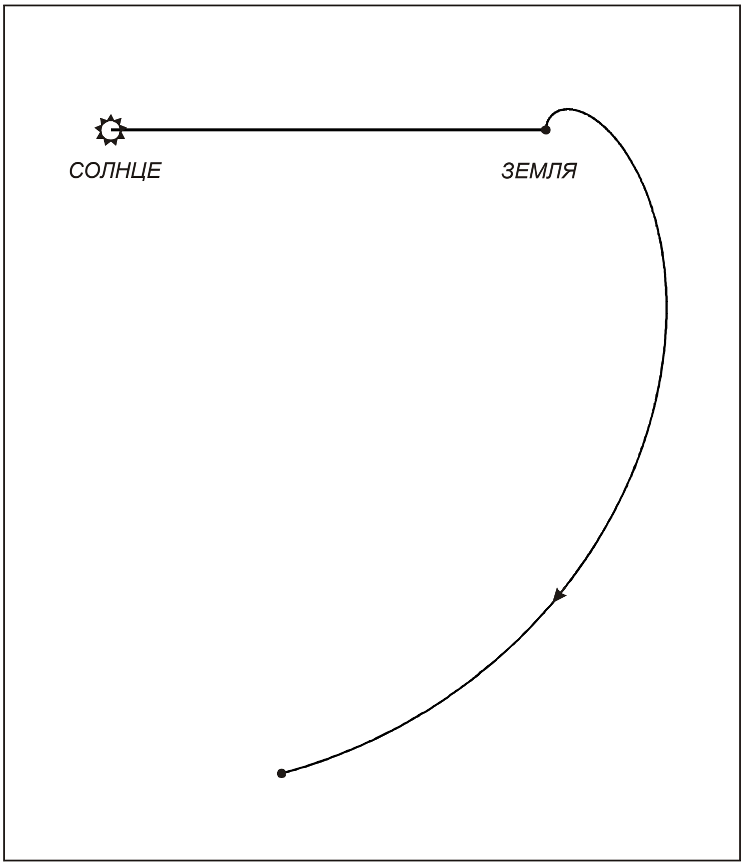
$$m = 2.5\lg\frac{100}{7.5} = 2.8.$$

Итого, яркость зодиакального света на указанном угловом расстоянии от Солнца составляет 2.8^m с квадратного градуса. Звездная величина 3.4^m соответствует звездной величине точечного источника, который освещает Землю также, как и вся Туманность Андромеды. Чтобы получить среднюю поверхностную яркость на один квадратный градус, соответствующую освещенность нужно разделить на площадь туманности в квадратных градусах. По формуле Погсона получаем:

$$m = 3.4 + 2.5\lg S = 3.4 + 2.5\lg(3.2\cdot 1) = 4.7$$

Таким образом, Туманность Андромеды в среднем на 2^m, то есть в 6 раз слабее, чем зодиакальный свет в 30-35° от Солнца. Это не мешает туманности легко быть видимой на небе вследствие наличия яркого ядра и значительного перепада яркости вокруг него.

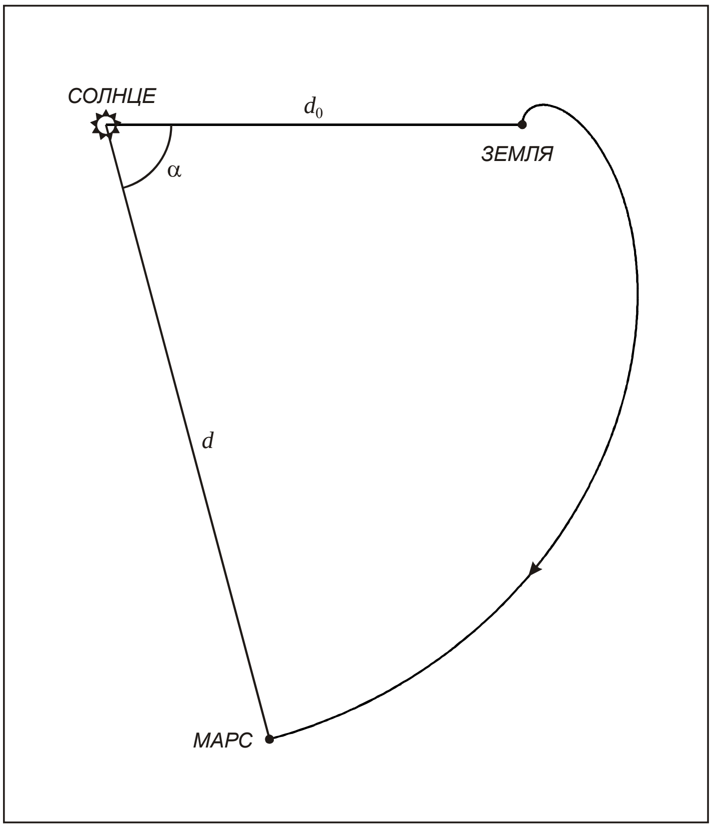
6. Условие. На рисунке показана траектория космического аппарата, летящего от Земли к некоторому объекту Солнечной системы относительно линии Солнце-Земля (неподвижной в данной системе отсчета) со стороны северного полюса эклиптики. Определите характеристики траектории аппарата (большая полуось, эксцентриситет) относительно Солнца и продолжительность полета по данной траектории без включения двигателей. Орбиту Земли считать круговой.



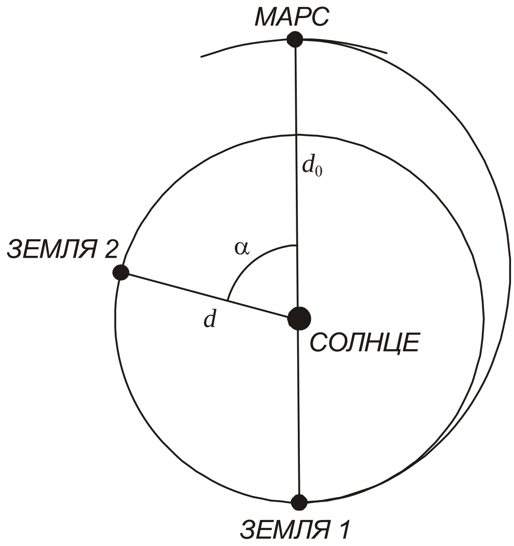
6. Решение. По рисунку мы можем определить расстояние от Солнца до объекта – цели полета аппарата:

$$d = 1.52\, d_0.$$

Здесь d_0 – расстояние от Солнца до Земли. По всей видимости, целью миссии является планета Марс. Аппарат движется в этой системе отсчета по часовой стрелке, то есть в неподвижной системе отсчета он отставал от Земли. Необходимо выяснить, по какой траектории осуществлялся перелет. Обратим внимание, что траектория аппарата в данной системе отсчета перпендикулярна линии "Солнце-Земля" во время старта и перпендикулярна линии "Солнце-Марс" при прибытии к этой планете. Радиальная компонента скорости (направленная вдоль линии "Солнце-аппарат") в эти моменты обращается в ноль. Коль скоро это выполняется в системе отсчета, вращающейся вокруг Солнца, это будет так и в неподвижной системе отсчета.



Последний вывод указывает, что аппарат двигался по эллипсу, у которого точка вылета была перигелием, а точка прилета – афелием (эллипс Гомана). В дальнейшем мы сможем дополнительно проверить этот факт.



Большая полуось и эксцентриситет такой орбиты будут равны:

$$a = \frac{d + d_0}{2} = 1.26 \text{ а.е.}; \quad e = \frac{d - d_0}{d + d_0} = 0.21.$$

Время перелета есть половина орбитального периода для этого эллипса:

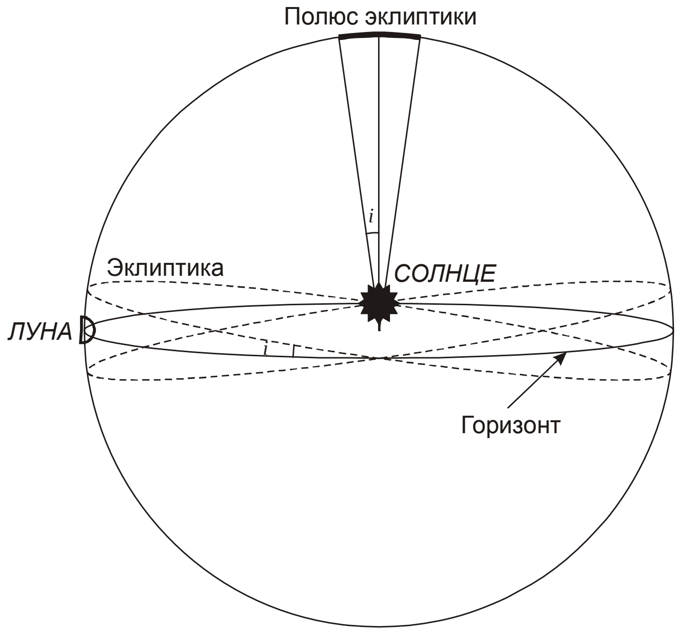
$$T = \frac{T_0}{2}\left(\frac{a}{d_0}\right)^{3/2} = 0.71 \text{ года}.$$

Здесь T_0 – орбитальный период Земли (1 год). За этот период сама Земля сместится по своей орбите на угол 360° (T/T_0) = 255°. Угол α между гелиоцентрическими направлениями на Землю и аппарат составит 75°, что соответствует данным рисунка. Таким образом мы еще раз убеждаемся в том, что аппарат действительно летел по эллипсу Гомана с заданными параметрами.

11 класс

1. Условие. Солнце и Луна в фазе первой четверти одновременно заходят за горизонт. На какой широте находится наблюдатель? Рефракцией и параллаксом Луны пренебречь.

1. Решение. Изобразим конфигурацию Солнца и Луны в момент наблюдения:



Солнце всегда находится на эклиптике. Луна в первой четверти располагается в 90° восточней Солнца. При этом Луна может отстоять от эклиптики на угол, не превышающей наклона лунной эклиптике *i* (5.15°). Получается, что в момент наблюдения эклиптика располагается между двумя пунктирными линиями на рисунке. Следовательно, один из полюсов эклиптики (северный либо южный) находится рядом с зенитом, отстоя на него на угол не более *i*. При этом направление от зенита к полюсу эклиптики может быть любым, так как в условии задачи не сказано, в каких точках горизонта находится Солнце. Если оно заходит точно на западе, то полюс эклиптики удален от зенита к северу или югу. Склонение полюса эклиптики равно

$$\delta = \pm (90° - \varepsilon) = \pm 66.55°.$$

Здесь ε – угол наклона экватора к эклиптике. Широта места может быть равна

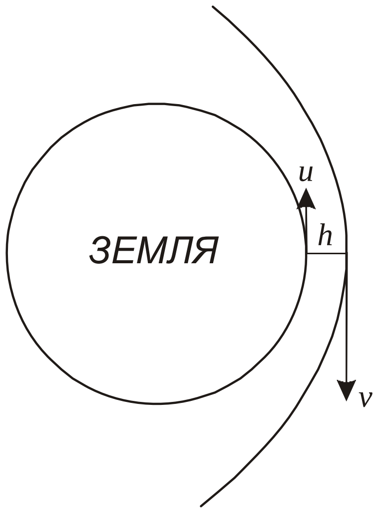
$$\delta - i \le \varphi \le \delta + i.$$

В итоге, мы получаем интервалы для широты: [–71.7°; –61.4°]; [+61.4°; +71.7°].

2. Условие. С какой максимальной угловой скоростью среди звезд может перемещаться искусственный спутник на околоземной орбите без двигателей при наблюдении с поверхности нашей планеты?

2. Решение. Так как в условии задачи говорится об искусственном спутнике на орбите вокруг Земли, он не может двигаться относительно Земли быстрее второй космической скорости v_2

(точнее говоря, он не может двигаться и с этой скоростью, она рассматривается как верхней предел). Угловая скорость движения спутника относительно звезд будет тем больше, чем больше его скорость относительно наблюдателя и чем меньше расстояние до него. Также относительная скорость должна быть направлена перпендикулярно направлению на спутник. Рассмотрим предельную ситуацию, при которой орбита спутника лежит в плоскости экватора Земли, а направление вращения спутника противоположно направлению осевого вращения Земли:



Для спутника, пролетающего в зените над наблюдателем на экваторе, угловая скорость составит

$$\omega = \frac{u+v}{h} = \frac{(2\pi R/T)+v}{h}.$$

Здесь R – радиус Земли, T – продолжительность звездных суток. Для скорости v справедливо неравенство

$$v < v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R+h}}.$$

Здесь M – масса Земли, а h – минимальная высота полета спутника, которую можно принять равной 200 км. В итоге, максимальная угловая скорость равна примерно 0.06 рад/с или 3°/с.

3. Условие. На снимках космической обсерватории SOHO различимы звезды до 8^m на 20 угловых радиусах Солнца от его центра. Каким должен быть размер астероида, чтобы его можно было бы обнаружить рядом с Солнцем, в 20 радиусах от его центра в пространстве? Оптические свойства поверхности астероида считать аналогичными лунным, материал – тугоплавким, изменениями свойств из-за нагрева пренебречь.

3. Решение. Чтобы увидеть астероид, расположенный в 20 радиусах Солнца от его центра, на 20 угловых радиусах Солнца от его положения на небе, астероид должен располагаться «сбоку» от Солнца. Условия его освещения будут аналогичны условию освещения Луны в фазе первой или последней четверти, поэтому нам нужно сравнивать яркость астероида с Луной именно в этой фазе. Тогда ее блеск m_0 составляет -10^m. Освещенность, создаваемая Луной на Земле в это время, равна

$$J_0 = \frac{B \cdot A \cdot F \cdot R_0^2}{16\pi \cdot L_0^2 D_0^2}.$$

Здесь B – светимость Солнца, A – сферическое альбедо Луны, F – фактор, характеризующий отражательную способность лунной поверхности для конфигурации первой и последней четверти (может показаться, что этот фактор равен 0.5, но в действительности он существенно меньше, как видно из звездных величин Луны в первой и последней четверти и в полнолунии). R_0 – радиус Луны, L_0 – расстояние от Солнца до Луны (и Земли), D_0 – расстояние от Луны до Земли.

По условию задачи, свойства поверхности астероида аналогичны лунным, следовательно, при таких же условиях освещения («сбоку») у него будут те же значения A и F. Расстояние от астероида до Земли в этом случае такое же, как от Солнца до Земли – L_0. Освещенность, создаваемая астероидом на Земле, составит

$$J = \frac{B \cdot A \cdot F \cdot R^2}{16\pi \cdot D^2 L_0^2}.$$

Здесь R – радиус астероида, D – его расстояние от Солнца. Чтобы обнаружить астероид, эта освещенность должна соответствовать звезде m=8, то есть

$$\frac{J}{J_0} = \frac{R^2 D_0^2}{R_0^2 D^2} \geq K = 10^{0.4(m_0 - m)} = 6.3 \cdot 10^{-8}.$$

Радиус астероида должен быть

$$R \geq \frac{R_0 D \sqrt{K}}{D_0}.$$

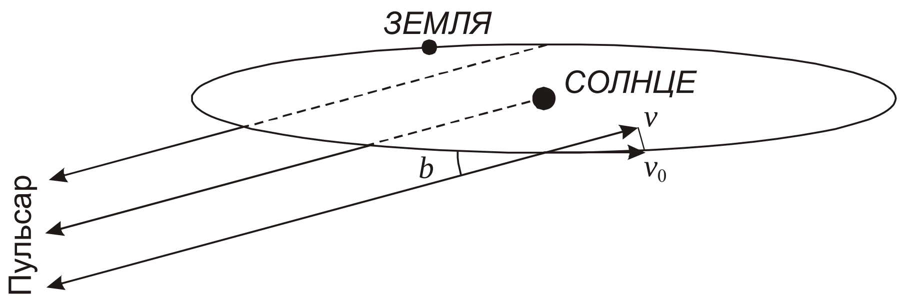
Расстояние D есть 20 радиусов Солнца (14 млн км), отсюда минимальный радиус астероида составляет 16 км.

4. Условие. Пульсар с гелиоцентрическим периодом 0.3 секунды имеет координаты $\alpha = 18^h$, $\delta = -55°$. В каких пределах будет меняться наблюдаемый период этого пульсара в течение года?

4. Решение. На период (или частоту) прихода импульсов от пульсара будет влиять движение Земли – как орбитальное, так и осевое. Пусть v – лучевая скорость Земли (наблюдателя) относительно пульсара. Тогда изменение периода пульсара ΔP по сравнению с его гелиоцентрическим периодом P будет происходить в соответствии с эффектом Доплера:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{v}{c}.$$

Определим, как расположен пульсар относительно плоскости эклиптики. Из его координат видно, что он находится точно под южной точкой эклиптики (точкой зимнего солнцестояния) со склонением $-\varepsilon$ (угол наклона экватора к эклиптике с отрицательным знаком). Эклиптическая широта b в этом случае равна $\delta + \varepsilon = -31.5°$.



Максимальная (по модулю) относительная скорость, создаваемая орбитальным движением Земли, равна

$$v = v_0 \cos b = 25.4 \text{ км/с}.$$

Осевая скорость вращения даже на экваторе примерно в 50 раз меньше и не внесет заметного изменения в эту величину. Амплитуда изменений периода составляет ±0.000025 с. Разность между максимальным и минимальным периодами составит 0.00005 с.

5. Условие. Каким должно быть фокусное расстояние наземного телескопа с апертурой 20 см, чтобы количество энергии, приходящее от Марса и Антареса (1.1^m) на один пиксель ПЗС-матрицы, было одинаковым? Считать Марс находящимся в великом противостоянии: его блеск -2.9^m, расстояние до Земли 56 млн км. Размер квадратного пикселя ПЗС-матрицы равен 10 мкм.

5. Решение. Пусть J_A – поток световой энергии, приходящей от Антареса, а J_M – поток энергии приходящей от Марса. Из формулы Погсона можем определить отношение этих потоков как

$$\frac{J_M}{J_A} = K = 10^{0.4(m_A - m_M)} = 40.$$

При этом Марс является протяженным объектом с угловым диаметром δ_M=25″ (это можно определить на основе заданного расстояния до Земли), а Антарес – точечная звезда. Физически рассмотреть его диск нельзя, а его угловые размеры при наблюдении в телескоп будут определяться дифракцией и атмосферным дрожанием. Размер дифракционного диска (кружка Эри) для телескопа с диаметром объектива D равен

$$\delta_{A0} = 206265'' \cdot 1.22 \frac{\lambda}{D} = 0.69''.$$

Атмосферное дрожание увеличивает видимый диск до размера δ_A порядка 1″. Получается, что видимая площадь Антареса на небе примерно в 600-800 раз меньше видимой площади диска Марса, а его поверхностная яркость в 15-20 раз больше поверхностной яркости диска Марса. Поэтому если угловой размер, соответствующий одному пикселю матрицы, окажется меньше 1″, то изображения Марса и Антареса попадут на несколько пикселей, и освещенность пикселя от Антареса будет в 15-20 раз больше, чем от Марса.

Однако, условие задачи может быть выполнено, если маленькое изображение Антареса уместится в один пиксель, будучи меньше его по размерам, а изображение Марса займет K=40 пикселей. Рассчитаем угловой размер пикселя для этого случая:

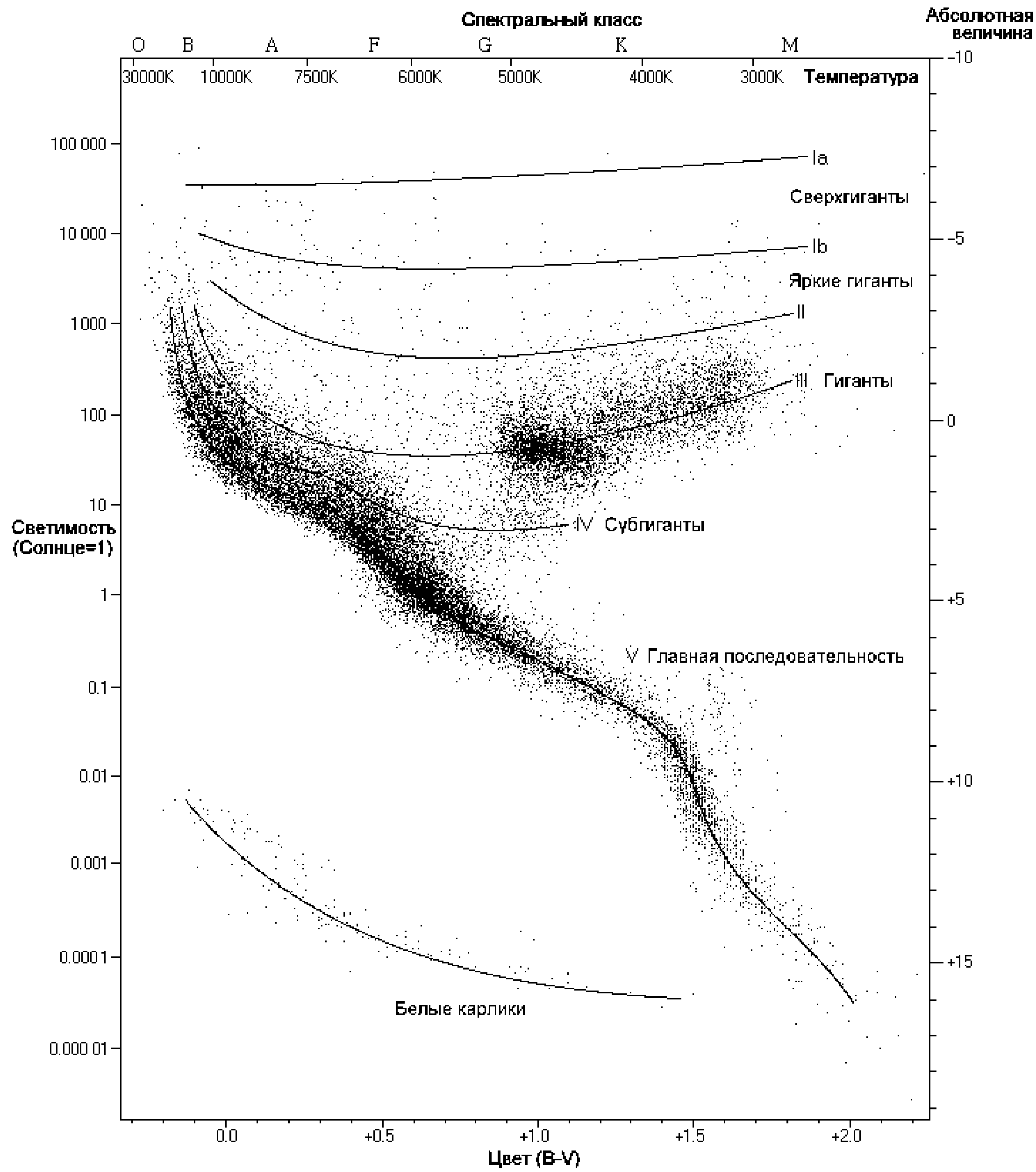
$$\beta = \sqrt{\frac{\pi\delta_{\text{М}}^2}{4K}} = 3.5''.$$

Это больше угловых размеров Антареса, размытых атмосферным дрожанием, удовлетворяя сделанному выше предположению. Зная линейный размер пикселя *b*, получаем фокусное расстояние объектива:

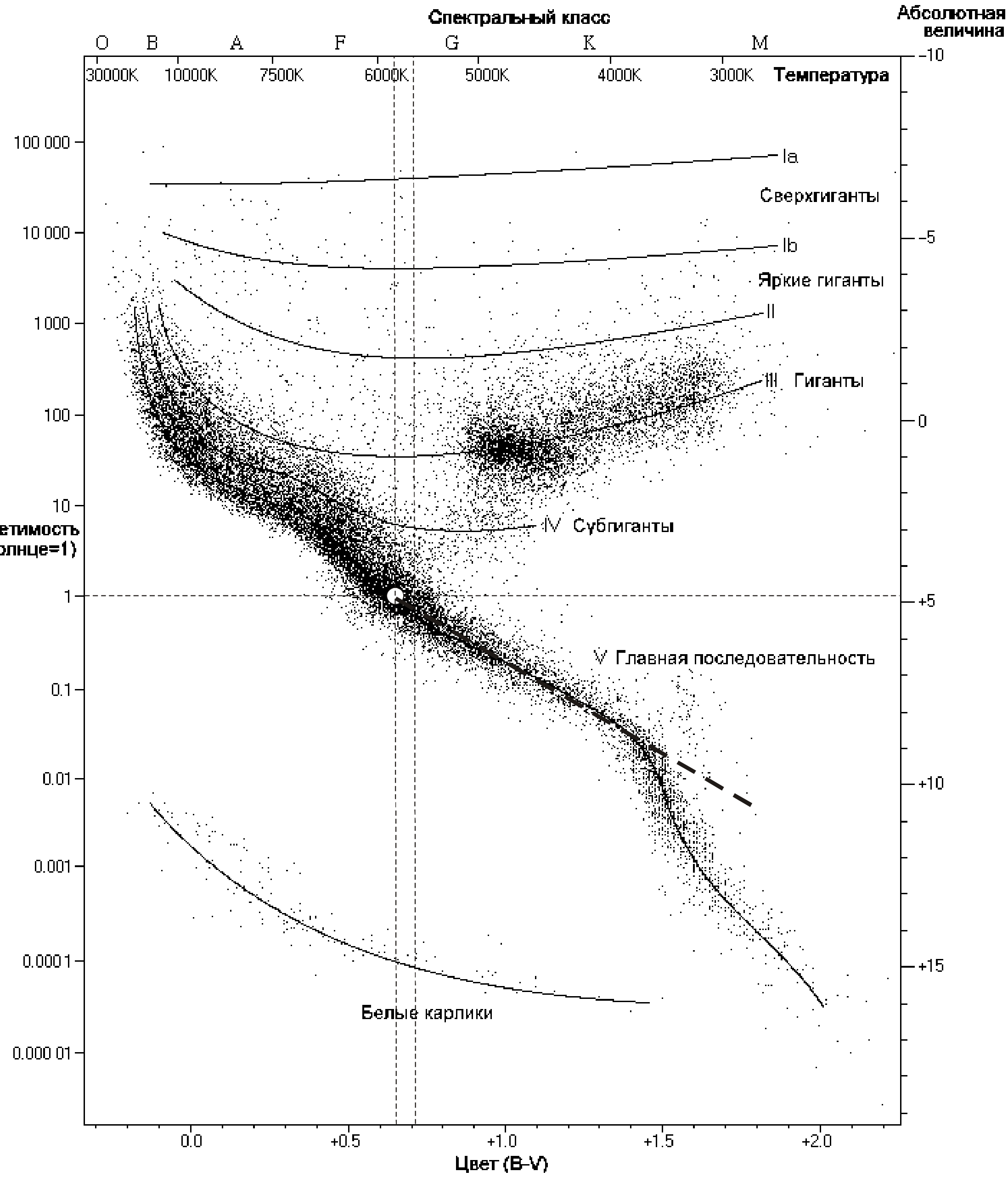
$$F = \frac{b \cdot 206265''}{\beta''} = 60 \text{ см}.$$

Ко всему сказанному необходимо добавить, что даже при больших размерах пикселей изображение Антареса может попадать на их границу, освещая сразу несколько (от 2 до 4) пикселей. Этот эффект приводит к уменьшению средней освещенности одного пикселя от Антареса в 2-4 раза. Уменьшение освещенности пикселей от Марса в 2-4 раза соответствует увеличению требуемого фокусного расстояния в 1.5-2 раза.

6. Условие. Перед Вами диаграмма Герцшпрунга – Рассела, на которую нанесены звезды в соответствии с их светимостью (или абсолютной звездной величиной в полосе V) и показателем цвета B–V (или эффективной температурой, если определять ее по этому показателю цвета). Предположим, у далекой звезды, похожей на Солнце и находящейся на оси главной последовательности, есть более слабый близкий спутник, также расположенный на оси главной последовательности. Система не разрешается в телескоп, и данные ее фотометрии относятся ко всей системе в целом. Нарисуйте фрагмент диаграммы вблизи положения Солнца и отметьте, куда на ней может попасть такая звезда. Определите максимально возможное смещение этой звезды от положения главной звезды по абсолютной звездной величине и температуре. Химический состав обеих звезд системы считать одинаковым, межзвездным поглощением света пренебречь.



6. Решение. По условию задачи спутник не может быть ярче главной звезды. С учетом одинакового химического состава можно сделать вывод, что его температура меньше температуры главной звезды, а цвет (B–V) больше, чем у главной звезды. Можно выделить два крайних случая. Если спутник такой же яркий, как и главная звезда, значит его температура такая же и цвет такой же. Показатель цвета двойной системы не изменится, а блеск возрастет на $2.5 \lg 2 \approx 0.75^m$. Напротив, очень слабый спутник практически не будет вносить вклада в суммарный блеск двойной, а значит и в ее цвет, т. е. двойная будет располагаться на диаграмме там же, где и главная звезда. В промежуточном случае блеск двойной будет немного ярче блеска главной звезды, а ее цвет больше, т. е. двойная звезда окажется на диаграмме выше и правее. Очевидно, что геометрическое место всех возможных положений двойной не отрезок прямой, а часть более сложной кривой.



Положение звезд на 1-2^m слабее Солнца на оси главной последовательности можно характеризовать прямой линией. Чтобы найти уравнение этой линии нужно определить на ней координаты двух точек: Солнца и какой-либо более слабой звезды (определяется по диаграмме). Коэффициент наклона получаем равным

$$\frac{(\mathrm{B-V})_1 - (\mathrm{B-V})_0}{M_1 - M_0} = K \approx 0.2 = \frac{1}{5}.$$

Здесь индексы «0» и «1» относятся к Солнцу и более слабой звезде соответственно. Данная прямая показана пунктиром на диаграмме. Для наглядности она там продлена в область более слабых звезд. Там данная прямая зависимость нарушается, но эти звезды нас уже меньше интересуют как возможные спутники вследствие их слабости.

Предположим, у звезды – копии Солнца со светимостью J_0 есть звезда-спутник с яркостью $J=b\cdot J_0$ ($0<b\le 1$). Тогда абсолютная звездная величина в полосе V для спутника составит

$$M_1 - M_0 = -2.5 \lg b,$$

Такие же разности будут иметь место для видимой звездной величины в полосе V. С учетом отсутствия межзвездного поглощения мы можем записать выражение для звездных величин в полосе B:

$$(\mathrm{B}-\mathrm{V})_1 - (\mathrm{B}-\mathrm{V})_0 = K(M_1 - M_0) = -(1/2) \lg b;$$
$$\mathrm{B}_1 - \mathrm{B}_0 = (\mathrm{B}-\mathrm{V})_1 - (\mathrm{B}-\mathrm{V})_0 + (\mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_0);$$
$$\mathrm{B}_1 - \mathrm{B}_0 = (\mathrm{K}+1)\,(M_1 - M_0) = -3 \lg b;$$

Здесь мы учли, что абсолютные звездные величины M приведены в полосе V. Мы видим, что соотношение яркостей двух звезд в полосе B составит

$$\frac{J_{\mathrm{B1}}}{J_{\mathrm{B0}}} = 10^{-0.4 \cdot 3 \lg b} = b^{1.2}.$$

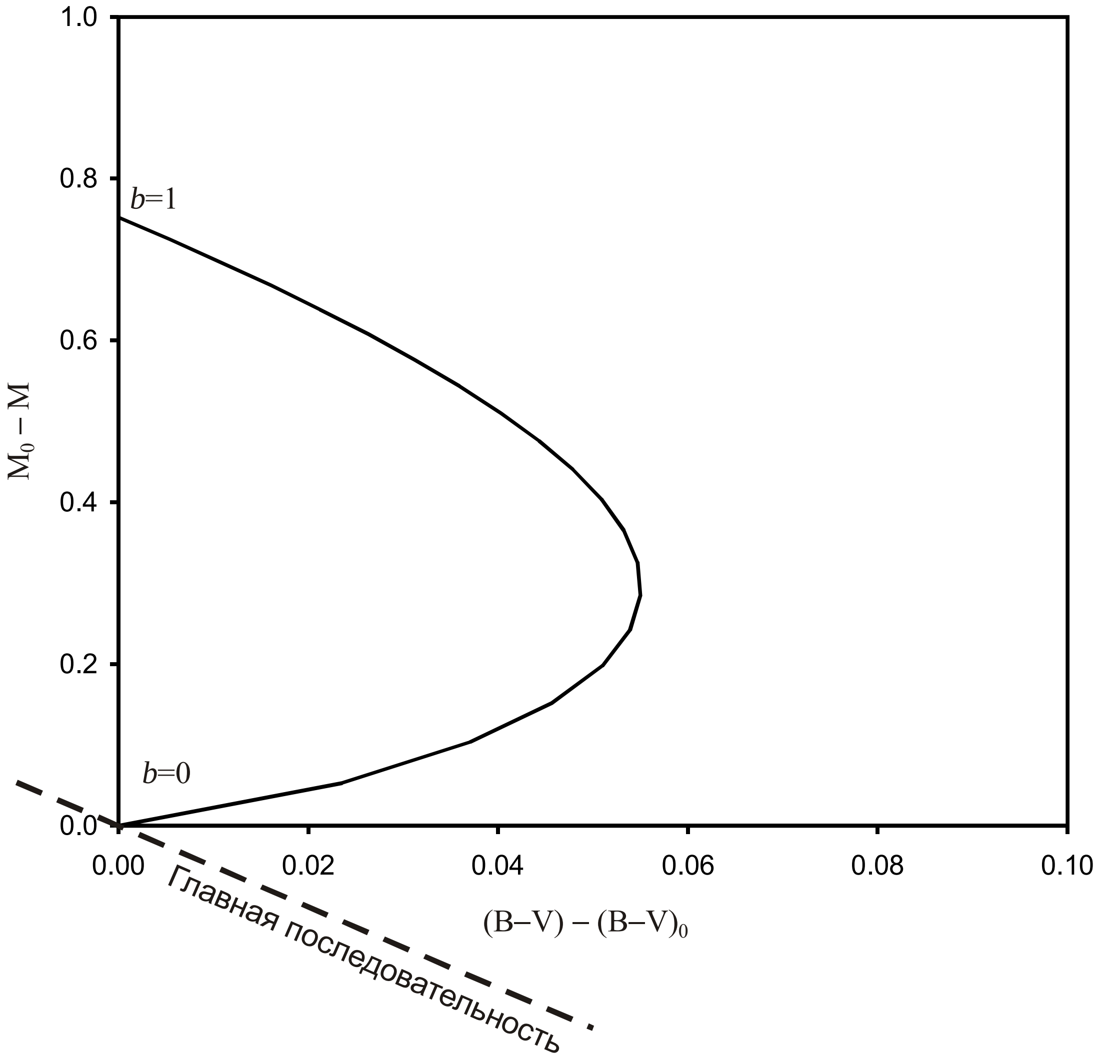
Результирующий показатель цвета двойной системы (по сравнению с солнечным) будет равен

$$(\mathrm{B}-\mathrm{V}) - (\mathrm{B}-\mathrm{V})_0 = -2.5 \lg \frac{1+b^{1.2}}{1+b}.$$

Абсолютная звездная величина системы (по сравнению с солнечной) составит

$$M - M_0 = -2.5 \lg (1+b).$$

Мы получили выражения для обеих величин, стоящих по осям диаграммы. Для того, чтобы определить положение двойной системы, нужно вычислить эти величины для разных значений b от 0 до 1 и нарисовать соответствующий график.



Максимальный сдвиг по абсолютной звездной величине равен 2.5 lg 2 = 0.75, что соответствует очевидному случаю двух одинаковых звезд. Показатель цвета, а значит и измеренная по нему температура, не изменятся. Максимальный сдвиг по показателю цвета составляет примерно 0.055. По диаграмме видим, что это соответствует уменьшению эффективной температуры на 200 K.