Практический тур

Условия, решения и схема оценивания. 10 класс

Содержание

10.7. Базовая зависимость

В. Б. Игнатьев

В таблице ниже представлены данные из каталога Brandler et al. по некоторым наиболее ярким звёздам одного рассеянного скопления. Определите показатель степени зависимости «масса – светимость» для звёзд главной последовательности в диапазоне масс от 2 $M_{\odot}$ до $5M_{\odot}$ на примере данного скопления.

номер	$\lg L$	$Gmag$	$\lg T$	$\lg g$	$BPmag - Gmag$
1	2.50	5.20	4.126	3.979	-0.018
2	2.37	5.44	4.119	4.06	-0.022
3	2.34	5.43	4.117	4.076	-0.035
4	2.29	5.64	4.113	4.097	-0.04
5	2.22	5.75	4.107	4.129	-0.043
6	1.97	6.16	4.079	4.213	-0.04
7	1.93	6.30	4.073	4.223	-0.037
8	1.82	6.43	4.059	4.245	-0.03
9	1.76	6.60	4.05	4.255	-0.023
10	1.63	6.80	4.036	4.267	-0.019
11	1.63	6.84	4.029	4.271	-0.01
12	1.63	6.82	4.029	4.272	0.026
13	1.61	6.81	4.026	4.274	-0.005
14	1.56	6.90	4.018	4.278	-0.002
15	1.52	7.00	4.010	4.281	0.005
16	1.46	7.20	4.001	4.285	0.007
17	1.41	7.10	3.991	4.288	0.020
18	1.38	7.29	3.987	4.289	0.025
19	1.32	7.35	3.976	4.291	0.038
20	1.29	7.53	3.969	4.292	0.036
21	1.24	7.55	3.960	4.294	0.050
22	1.17	7.65	3.947	4.295	0.060
23	1.12	7.71	3.939	4.297	0.064
24	1.10	7.75	3.935	4.297	0.066
25	1.10	7.80	3.934	4.297	0.078
26	1.08	7.83	3.931	4.298	0.071
27	1.07	7.73	3.930	4.298	0.076
28	1.01	7.96	3.919	4.300	0.082
29	0.98	8.02	3.914	4.301	0.091

В таблице приведены следующие данные: порядковый номер; $\lg L$ – логарифм болометрической светимости звезды в единицах светимости Солнца; $Gmag$ – видимая звёздная величина в полосе G каталога GAIA; $\lg T$ – логарифм эффективной температуры звезды в кельвинах; $\lg g$ – логарифм ускорения свободного падения в фотосфере звезды в системе единиц СГС (сантиметр/грамм/секунда); $BPmag - Gmag$ – показатель цвета для полос $BPmag$ и $Gmag$ каталога GAIA.

Параллакс звездного скопления составляет $\pi = 7.4$ миллисекунды дуги. Абсолютная звёздная величина Солнца в полосе G каталога GAIA равна $+4.8^m$. Осевым вращением звезд пренебречь.

Решение.

Для решения задачи нужно получить классическую зависимость «масса–светимость» для звёзд главной последовательности. Она имеет вид:

$$L \sim M^{\gamma}$$

γ - показатель степени, разный для различных диапазонов масс. И участникам нужно найти показатель степени для указанного в условии диапазона масс.

На первом этапе стоит проверить, что все предоставленные звезды относятся к главной последовательности, так как яркие звезды могут быть и красными гигантами или двойными звездами. На втором этапе, что все они находятся в нужном нам диапазоне масс. Эту нужно сделать, чтобы не обрабатывать и получать зависимость для правильной выборки данных.

Для того, чтобы проверить, что все звезды являются звездами главной последовательности построим диаграмму звездная величина – цвет. Если все верно, то получится плавная линия. Если какие-то точки будут заметно выбиваться, то эти звезды не принадлежат главной последовательности.

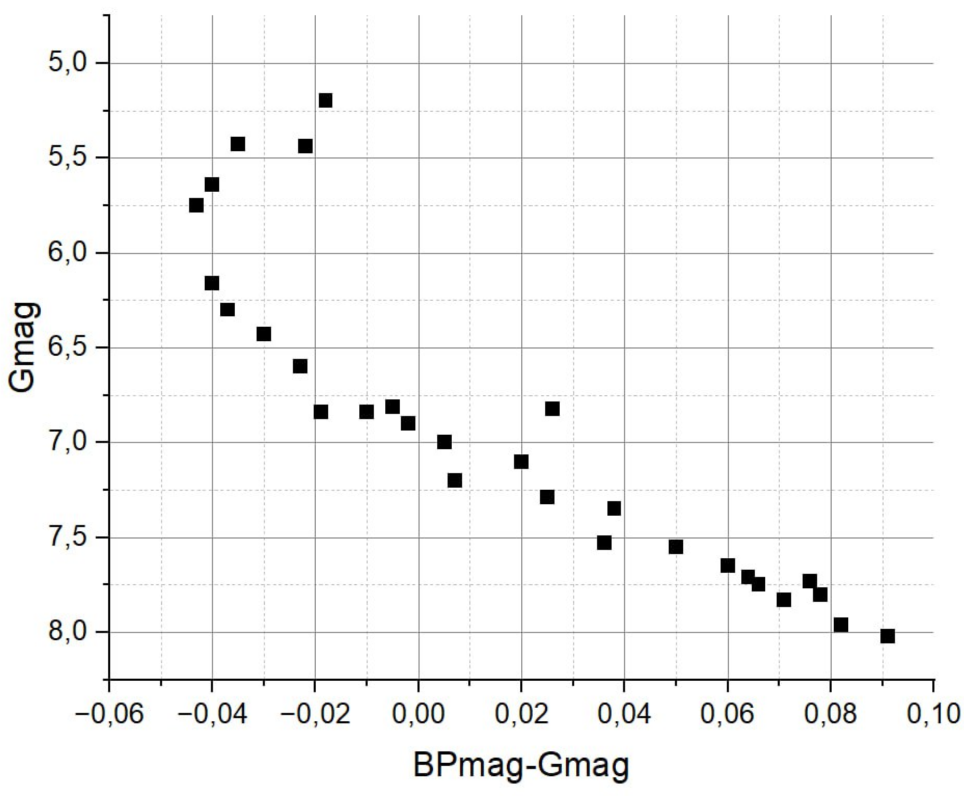


Рис. 1: Построенная диаграмма звездная величина-цвет.

Проведем анализ диаграммы. На ней хорошо видны звезды главной последовательности, точка поворота - ухода звезд с главной последовательности. Звезды под номерами 1-5 формируют точку поворота и уже не принадлежат главной последовательности и находятся на следующей эволюционной стадии. Точка 12 сильно выделяется над полученной главной последовательностью, это может быть двойная система, состоящая из двух примерно одинаковых по массе, и соотвественно цвету, звезд. А может быть звезда фона, которая наложилась в картинной плоскости на рассматриваемое скопление.

Участник может построить аналогичный график, выбрав по вертикальной оси $\lg L$. Точки, которые нужно отбросить не изменятся.

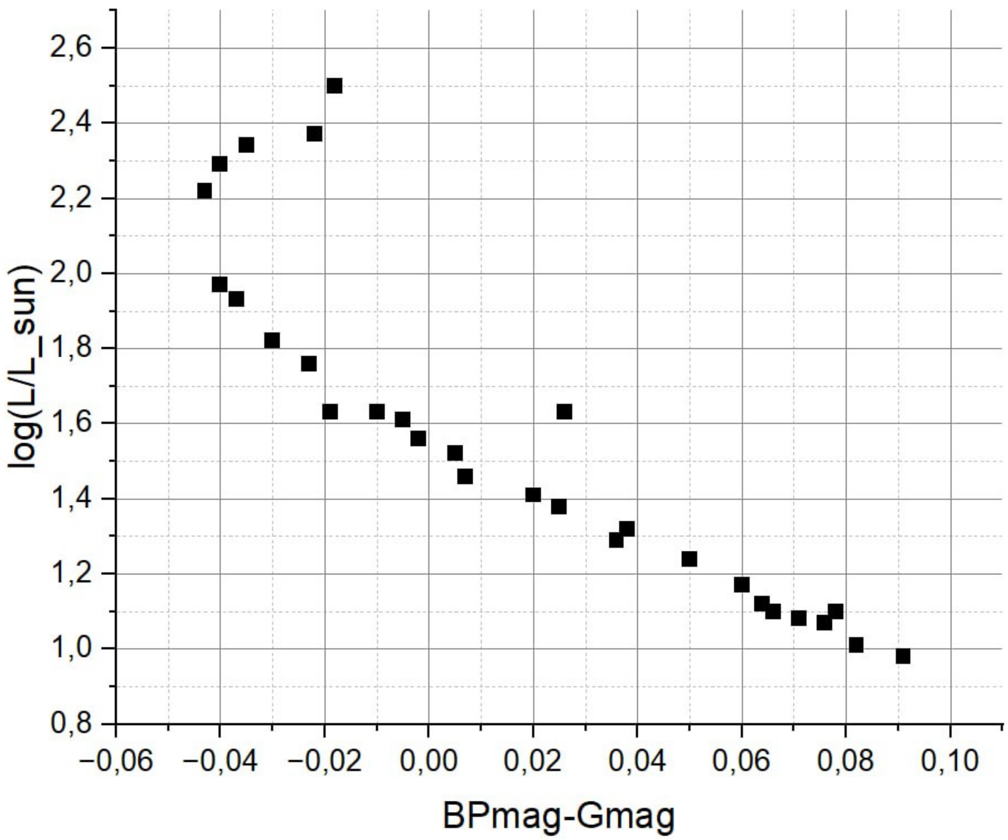


Рис. 2: Построенная диаграмма звездная величина-цвет.

Далее участник при решении задачи может действовать следующими способами для всех оставшихся в рассмотрении точек.

Версия в лоб.

Для всех оставшихся точек сделаем следующие действия.

A. Из логарифма температуры вычислить значение температуры фотосферы звезды, а из логарифма светимости – светимость в светимостях Солнца.

B. Определим радиус звезды R при помощи закона Стефана-Больцмана $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$

C. Из $\lg g$ логарифма ускорения свободного падения получим саму величину g

D. Из величины ускорения свободного падения вычислим M массу звезды

E. Далее еще раз отсеем те звезды, которые находятся вне диапазона $2 - 5\ M_\odot$

F. Вычислим логарифм массы $\lg M$ и построить зависимость $\lg L - \lg M$

G. Отсеем точки не укладывающиеся в зависимость. Это будут точки от звезд фона либо двойных звезд.

Оставим этот путь для участников, которые обладают нелимитированным количеством времени.

Рациональный подход

Стоит заметить, что на последнем этапе нужно значение логарифма массы звезд, потому что логарифмируя зависимость масса-светимость можно получить линейную зависимость, коэффициент которой сразу дает искомую в задаче величину. Следовательно нет смысла уходить от логарифмов в сторону степенных зависимостей, а проще и удобнее получить общую формулу.

Запишем формулу для ускорения свободного падения и прологарифмируем ее:

$$g = \frac{GM}{R^2}, \qquad \rightarrow \qquad \lg g = \lg G + \lg M - 2\lg R$$

Запишем закон Стефана-Больцмана и прологарифмируем ее:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4, \qquad \rightarrow \qquad \lg L = \lg(4\pi\sigma) + 2\lg R + 4\lg T$$

Из второго выражения выразим $\lg R$ и подставим во первое, выразив в нем $\lg M$

$$\lg g = \lg G + \lg M - (\lg L - \lg(4\pi\sigma) - 4\lg T) = \lg(4\pi\sigma G) + \lg M - \lg L + 4\lg T$$

Следовательно:

$$\lg M = \lg g + \lg L - 4\lg T - \lg(4\pi\sigma G)$$

Стоит обратить внимание, что ускорение свободного падения g^* дано в величинах системы СГС, следовательно размерность величины сантиметр на квадратную секунду. В системе СИ это величина g будет на два порядка меньше.

$$\lg g = \lg g^* - 2$$

Также заметим, что светимость дана в светимостях Солнца. Следовательно, финальная формула будет выглядеть следующим образом:

$$\lg M = \lg g^* + \lg(LŁ_\odot) + \lg L_\odot - 4\lg T - \lg(4\pi\sigma G) - 2 = \lg g^* + \lg(LŁ_\odot) - 4\lg T + 14.32 + 26.59$$

$$\lg\frac{M}{M_\odot} = -30.3$$

Альтернативный способ получения необходимых соотношений возможен, если выражать единицы в массах и светимостях Солнца.

Запишем формулу отношения ускорений свободного падения звезды и Солнца и прологарифмируем ее:

$$g = \frac{GM}{R^2}, \qquad \to \qquad \frac{g}{g_\odot} = \lg\frac{M}{M_\odot} - 2\lg\frac{R}{R_\odot}$$

Запишем отношения светимостей через закон Стефана-Больцмана и прологарифмируем ее:

$$L = 4\pi R^2\sigma T^4, \qquad \to \qquad \lg\frac{L}{L_\odot} = 2\lg\frac{R}{R_\odot} + 4\lg\frac{T}{T_\odot}$$

Следовательно, если использовать логарифмические величины из таблицы, выражение будет иметь вид :

$$\lg\frac{M}{M_\odot} = \lg\frac{g}{g_\odot} + \lg\frac{L}{L_\odot} - 4\lg\frac{T}{T_\odot} = \lg g + \lg\frac{L}{L_\odot} - 4\lg T - \lg g_\odot + 4\lg T_\odot$$

Возьмем значения величин о Солнце из справочных данных, переведем их в систему СГС:

$$\lg g_\odot = \lg\left(\frac{GM_\odot}{R_\odot^2}\right) = \lg\left(\frac{6.67\cdot 10^{-8}\cdot 2\cdot 10^{33}}{(6.9\cdot 10^{10})^2}\right)\lg\left(2.74\cdot 10^4\right) \approx 4.44$$

$$4\lg T_\odot = 4\lg(5800) \approx 15.05$$

И итоговое выражение для расчета будет:

$$\lg\frac{M}{M_\odot} = \lg g + \lg\frac{L}{L_\odot} - 4\lg T - 4.44 + 15.05 = \lg g + \lg\frac{L}{L_\odot} - 4\lg T + 10.61$$

номер	$\lg L$	Gmag	$\lg T$	$\lg g$	BPmag-Gmag	$\lg M$
1	2.50	5.20	4.126	3.979	-0.018	0.585
2	2.37	5.44	4.119	4.06	-0.022	0.564
3	2.34	5.43	4.117	4.076	-0.035	0.558
4	2.29	5.64	4.113	4.097	-0.04	0.545
5	2.22	5.75	4.107	4.129	-0.043	0.531
6	1.97	6.16	4.079	4.213	-0.04	0.477
7	1.93	6.30	4.073	4.223	-0.037	0.471
8	1.82	6.43	4.059	4.245	-0.03	0.439
9	1.76	6.60	4.05	4.255	-0.023	0.425
10	1.63	6.80	4.036	4.267	-0.019	0.363
11	1.63	6.84	4.029	4.271	-0.01	0.395
12	1.63	6.82	4.029	4.272	0.026	0.396
13	1.61	6.81	4.026	4.274	-0.005	0.39
14	1.56	6.90	4.018	4.278	-0.002	0.376
15	1.52	7.00	4.010	4.281	0.005	0.371
16	1.46	7.20	4.001	4.285	0.007	0.351
17	1.41	7.10	3.991	4.288	0.020	0.344
18	1.38	7.29	3.987	4.289	0.025	0.331
19	1.32	7.35	3.976	4.291	0.038	0.317
20	1.29	7.53	3.969	4.292	0.036	0.316
21	1.24	7.55	3.960	4.294	0.050	0.304
22	1.17	7.65	3.947	4.295	0.060	0.287
23	1.12	7.71	3.939	4.297	0.064	0.271
24	1.10	7.75	3.935	4.297	0.066	0.267
25	1.10	7.80	3.934	4.297	0.078	0.271
26	1.08	7.83	3.931	4.298	0.071	0.264
27	1.07	7.73	3.930	4.298	0.076	0.258
28	1.01	7.96	3.919	4.300	0.082	0.244
29	0.98	8.02	3.914	4.301	0.091	0.235

Теперь заметим, что звезды под номерами 22 и больше имеют массу меньше, чем 2 $M_\odot$ ($\lg M = 0.301$), и для построения графика нам не подходят. Так же видно, что звезда 10 скорее всего является звездой фона, так как она лежит ниже главной последовательности и заметно выше в графике зависимости масса-светимость, поэтому эту точку необходимо отбросить.

Итоговая выборка звезд будет выглядеть следующим образом

номер	$\lg L$	Gmag	$\lg T$	$\lg g$	BPmag-Gmag	$\lg M$
6	1.97	6.16	4.079	4.213	-0.04	0.477
7	1.93	6.30	4.073	4.223	-0.037	0.471
8	1.82	6.43	4.059	4.245	-0.03	0.439
9	1.76	6.60	4.05	4.255	-0.023	0.425
11	1.63	6.84	4.029	4.271	-0.01	0.395
13	1.61	6.81	4.026	4.274	-0.005	0.39
14	1.56	6.90	4.018	4.278	-0.002	0.376
15	1.52	7.00	4.010	4.281	0.005	0.371
16	1.46	7.20	4.001	4.285	0.007	0.351
17	1.41	7.10	3.991	4.288	0.020	0.344
18	1.38	7.29	3.987	4.289	0.025	0.331
19	1.32	7.35	3.976	4.291	0.038	0.317
20	1.29	7.53	3.969	4.292	0.036	0.316
21	1.24	7.55	3.960	4.294	0.050	0.304

Строим график зависимости $\lg L$ от $\lg M$.

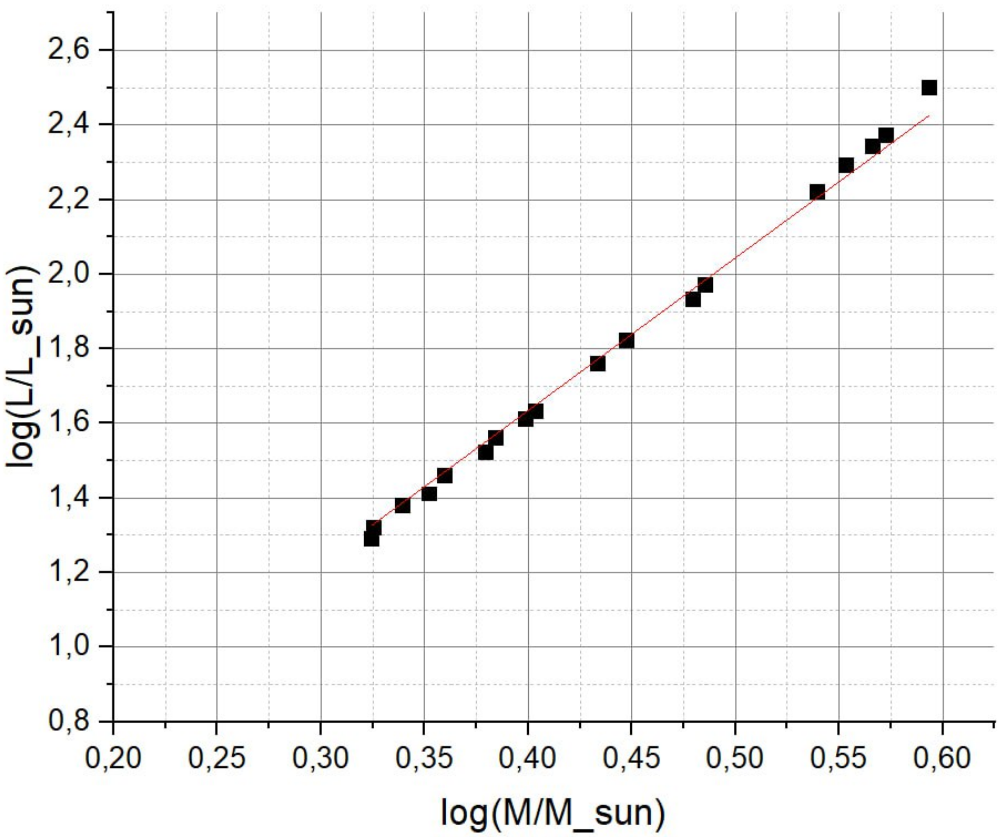


Рис. 3: зависимость $\lg L$ от $\lg M$.

Определить значение показателя степени лучше всего при помощи метода наименьших квадратов (МНК). Очень важно отметить, что мы строим линейную зависимость вида $y = Ax+B$, в которой свободный член зависимости $B = 0$. Построенная зависимость должна содержать точку $(L = 1\ L_\odot; M = 1\ M_\odot)$, что в логарифмических осях соответствует точке $(0; 0)$.

Получаем значение показателя степени: случай без свободного члена $\gamma = 4.086$. Случай определения зависимости со свободным членом, $\gamma = 4.134$ свободный член $b = -0.003$ Теперь, в качестве факультативного анализа построим графики для случаев, если точки не будут выброшены.

A. Случай, если ни одна точка не выброшена.

Случай определения без свободного члена - $\gamma = 4.044$.

Случай определения зависимости со свободным членом, показатель степени $\gamma = 4.267$, свободный член $b = -0.041$

B. Случай, если выброшены только точки 1-5.

Случай определения без свободного члена - $\gamma = 3.833$.

Случай определения зависимости со свободным членом, показатель степени $\gamma = 4.161$, свободный член $b = -0.007$

C. Случай, если выброшены только точки 10 и 12.

Случай определения без свободного члена - $\gamma = 4.069$.

Случай определения зависимости со свободным членом, показатель степени $\gamma = 4.274$, свободный член $b = -0.048$

D. Случай, если выброшены только точки 22-29.

Случай определения без свободного члена - $\gamma = 4.055$.

Случай определения зависимости со свободным членом, показатель степени $\gamma = 3.656$. свободный член $b = +0.12$

Ответ: случай без свободного члена $\gamma = 4.086$.

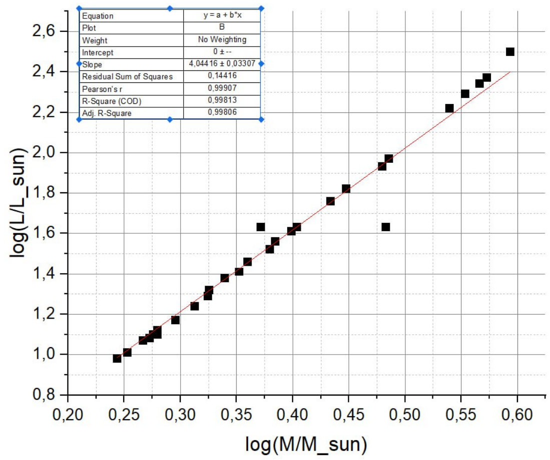


График со всеми точками

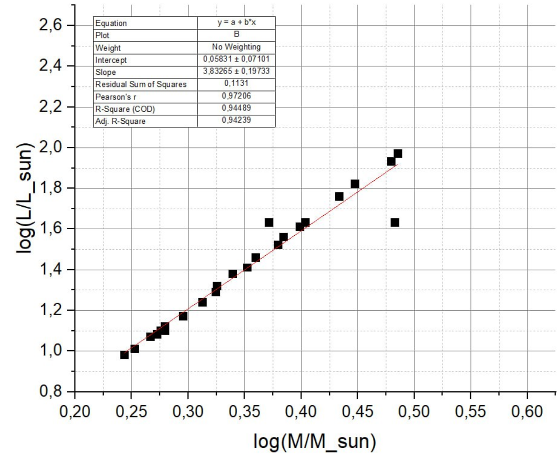
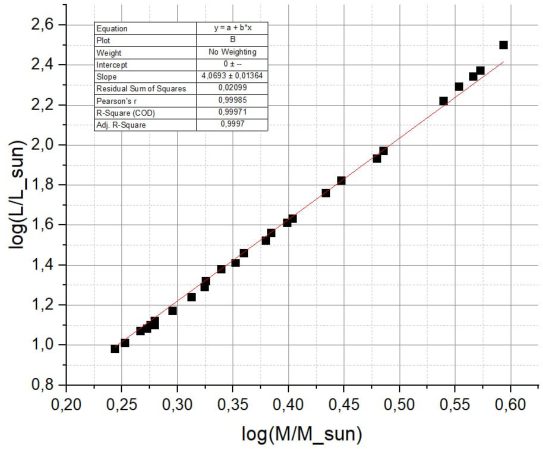
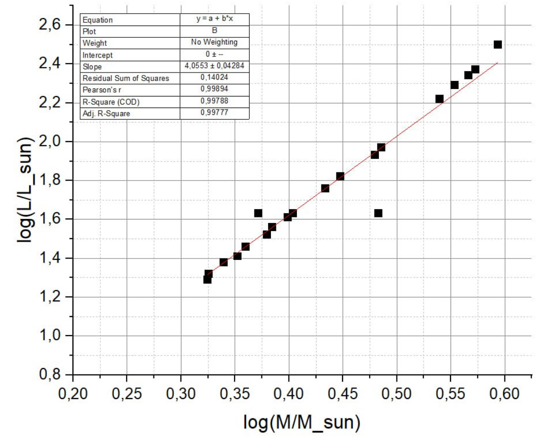


График со всеми точками, кроме точек 1-5



С. График со всеми точками, кроме точек 10 и 12



График, со всеми точками, кроме точек 22-29

Критерии оценивания. **25**

Решение, в котором ответ сразу записывается $\gamma = 4$ оценивается в ноль баллов

К1. Удаление лишних точек из выборки на основании ГР **7**

Построение диаграммы ГР в любом виде 3

Удаление 1-5 точек 2

Удаление 10 точки 1

Удаление 12 точки 1

К2. Определение масс звезд из таблицы **9**

Оценка за данный пункт выставляется только при получении верных значений масс.

Если массы определены для 2-3 случайно выбранных звезд, оценка за данный пункт не более 2х баллов при верном численном ответе.

К3. Удаление точек 22-29 из выборки, по критерию массы **2**

Этот балл за считывается, только если массы были определены корректно и удалены все точки. В случае любой ошибки оценка за пункт - 0 баллов

К4. Построение графика $\lg L - \lg M$ **2**

К5. Определение показателя степени зависимости $L \sim M^\gamma$ **5**

Если массы звезд определены не верно оценка за данный пункт 0 баллов

Если записан ответ, но не приведено обоснование и решение, или оно не является достаточным, то оценка за пункт - 0 баллов.

В случае, если часть точек из выборки не удалена, максимальная оценка за данный пункт 3 балла, при графическом методе определения угла наклона - 2 балла

Метод МНК 3

ИЛИ Графический метод 1

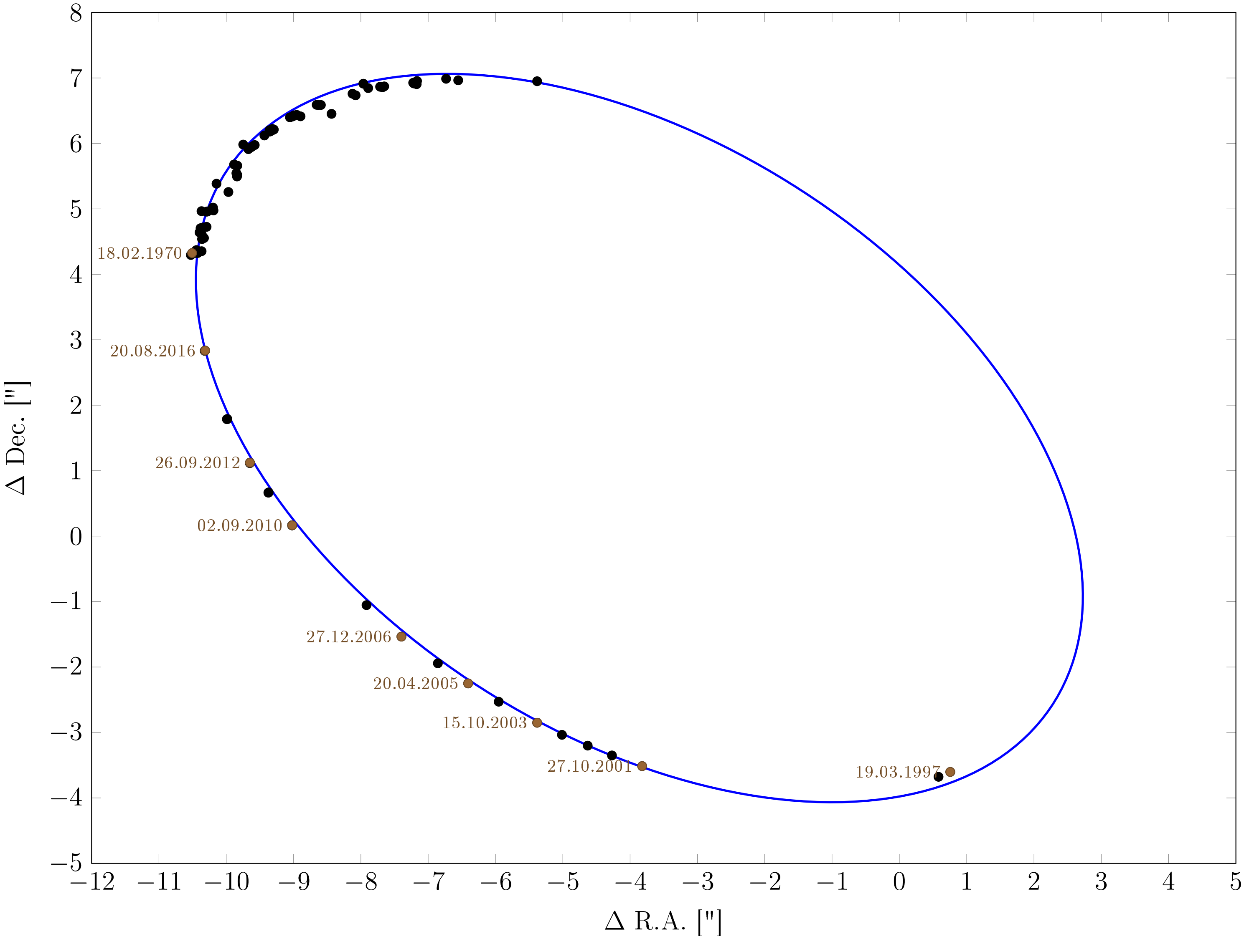
учет равенства нулю свободного члена 1

Получен численный ответ в диапазоне 4.10 ± 0.05 1

10.8. Танцы с Бубном

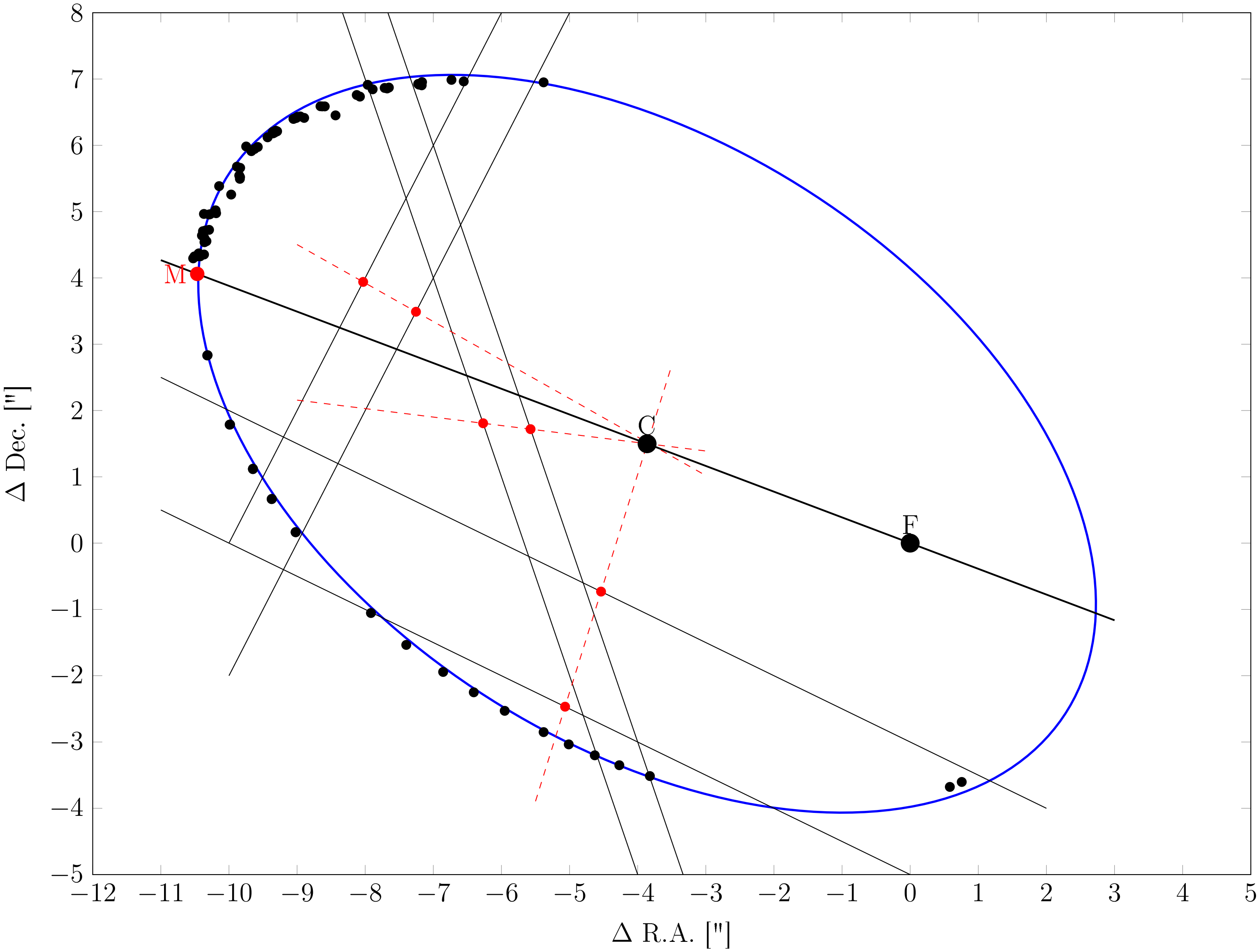
В. В. Красоткина, В.Б. Игнатьев

На диаграмме ниже показано положение белого карлика Сириус B относительно главного компонента системы (Сириус A). Определите период обращения, эксцентриситет, большую полуось орбиты системы и дату прохождения его через перицентр. Известно, что параллакс Сириуса составляет $0.378''$, сумма масс системы равна $3.08 M_\odot$, а угол между лучом зрения и нормалью к плоскости орбит системы $i = 43°$.



Решение.

Для начала восстановим положение центра эллипса. Для этого проведём несколько пар параллельных прямых через центры отрезков, образованных пересечением эллипса с прямыми (на графике – пунктирные линии). Их пересечение даст точку центра эллипса. Изменения положения Сириуса B происходят относительно главной звезды, поэтому точка $(0, 0)$ соответствует точке фокуса.



При проецировании эллипса на картинную плоскость все соотношения линейных размеров сохраняются. Тогда из данной картинки мы можем найти отношение двух величин, зависящих от эксцентриситета истинного эллипса: например, отношение фокального расстояния к апоцентрическому расстоянию. Расстояния между точками находим по теореме Пифагора, используя их координаты:

$$\frac{c}{Q} = \frac{a_0 e_0}{a_0(1+e_0)} = \frac{CF}{MF} = \frac{4.14}{11.23}$$

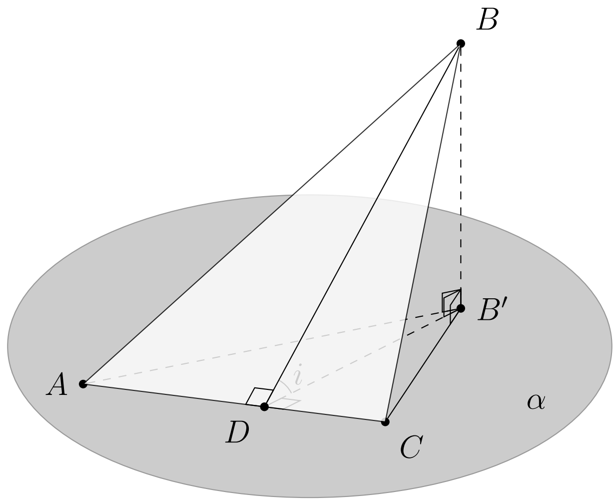
Отсюда

$$e_0 = 0.58$$

Теперь воспользуемся знанием стереометрии:

$$S = S_0 \cos i$$

Площадь проекции плоской фигуры равна площади истинной фигуры, умноженной на косинус угла между плоскостью фигуры и плоскостью проекции. Ниже для справки приведено доказательство этого факта, которое не требуется приводить в решении задачи.



Рассмотрим проецируемую фигуру – треугольник ABC, сторона которого АС лежит в плоскости проекции α (или параллельна плоскости проекции α). Угол между плоскостью и треугольником обозначим за i.

$$BB' \perp \alpha;\ BB' \cap \alpha = B' \text{ – проекция точки } B \text{ на плоскость } \alpha$$

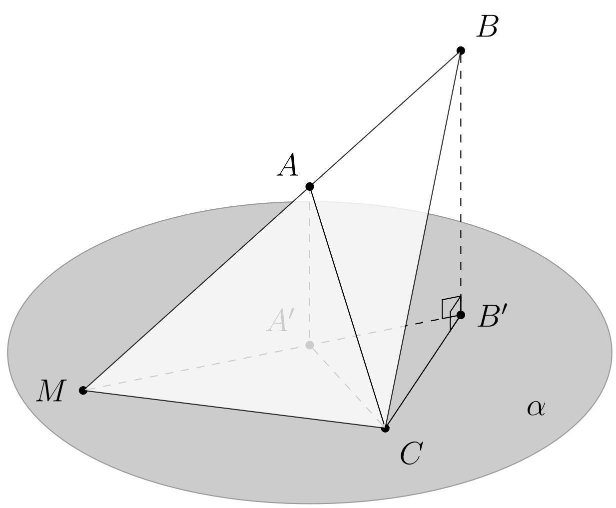
BD – высота $\triangle ABC$. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $B'D$ является высотой $\triangle AB'C$.

$$B'D = BD\cos i$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD,\ S_{AB'C} = \frac{1}{2}AC \cdot B'D \ \Rightarrow\ \frac{S_{AB'C}}{S_{ABC}} = \frac{B'D}{BD}$$

Тогда

$$\frac{S_{AB'C}}{S_{ABC}} = \cos i$$



Рассмотрим проецируемую фигуру – треугольник ABC, ни одна из сторон которого не лежит в плоскости проекции α и не параллельна ей. Угол между плоскостью и треугольником обозначим за i.

$$BB' \perp \alpha;\ BB' \cap \alpha = B' \text{ – проекция точки } B \text{ на плоскость } \alpha$$

$$AA' \perp \alpha;\ AA' \cap \alpha = A' \text{ – проекция точки } A \text{ на плоскость } \alpha$$

$$AB \cap \alpha = M \text{ – пересечение прямой } AB \text{ с плоскостью } \alpha$$

$$S_{ABC} = S_{MBC} - S_{MAC},\ S_{A'B'C} = S_{MB'C} - S_{MA'C}$$

Из первой части доказательства делаем вывод:

$$S_{MB'C} = S_{MBC} \cos i,\ S_{MA'C} = S_{MAC} \cos i$$

Тогда

$$S_{A'B'C} = S_{MBC} \cos i - S_{MAC} \cos i = S_{ABC} \cos i$$

Для произвольных фигур это равенство можно доказать, приближая их многоугольными фигурами.

Тогда справедливо соотношение

$$\frac{S_0}{S} = \frac{\pi a_0^2 \sqrt{1-e_0^2}}{\pi a^2 \sqrt{1-e^2}} = \frac{1}{\cos i}, \tag{1}$$

в котором все величины с индексом 0 соответствуют истинному эллипсу, а без индекса – видимому (проекции). Параметры видимого эллипса мы можем найти из прямых измерений и теоремы Пифагора:

$$a = 7.31'',\ b = 4.52'',\ e = 0.79$$

Тогда из (1) легко находится истинное значение большой полуоси в угловых единицах:

$$a_0 = 7.52''$$

Зная параллакс, найдем линейный размер полуоси системы:

$$a_l = a_0 \cdot \frac{1}{\pi} = 19.89 \text{ а.е.}$$

Период найдем из III закона Кеплера:

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{a_l^3}{GM_\Sigma} \ \Rightarrow\ T = 2\pi\sqrt{\frac{a_l^3}{GM_\Sigma}} = 50.63 \text{ года.}$$

Дату прохождения апоцентра снимем с графика: примерно 18.02.1970. Соооответственно, дата следующего прохождения перицентра – $\boxed{12.06.1995}$ (через половину периода системы). С этого момента $T = 50.63$ года пройти не успело, следовательно, данное прохождение перицентра было последним на данный момент.

Критерии оценивания. **25**

К1. Построение. Определение центра эллипса **5**

К2. Построение. Определение положения центральной звезды **2**

К3. Определение значения эксцентриситета **5**

К4. Определение значения большой полуоси **8**

- Описание метода расчёта через отношение площадей эллипсов 3
- Определение полуоси в угловых секундах 3
- Определение полуоси в астрономических единицах 2

К5. Определение периода системы **2**

К6. Определение момента прохождения перицентра **3**

- Определение точек апоцентра и перицентра 1
- Определение даты прохождения апоцентра 1
- Определение даты прохождения перицентра 1

10.9. Сгорел на работе

В.Б. Игнатьев, Д.Ф. Гасымов

На приложенном графике представлены зависимости от времени светимости двух звёзд на стадии главной последовательности. Нижний график построен для Солнца при его текущем химическом составе, а верхний график – для звезды с массой 1 $M_\odot$, которая образовалась на ранних этапах эволюции Вселенной и обладала значительно меньшей металличностью.

A. Чему равна масса водорода в Солнце, который к настоящему моменту уже преобразовался в гелий?

B. Какая масса водорода преобразуется в гелий в Солнце за всё время нахождения его на главной последовательности?

C. Чему равны массовые и количественные доли водорода и гелия в Солнце, когда оно выйдет со стадии главной последовательности?

D. Какая масса водорода преобразуется в гелий за всё время жизни звезды с массой 1 $M_\odot$, если она образовалась в ранней Вселенной и обладала низкой металличностью?

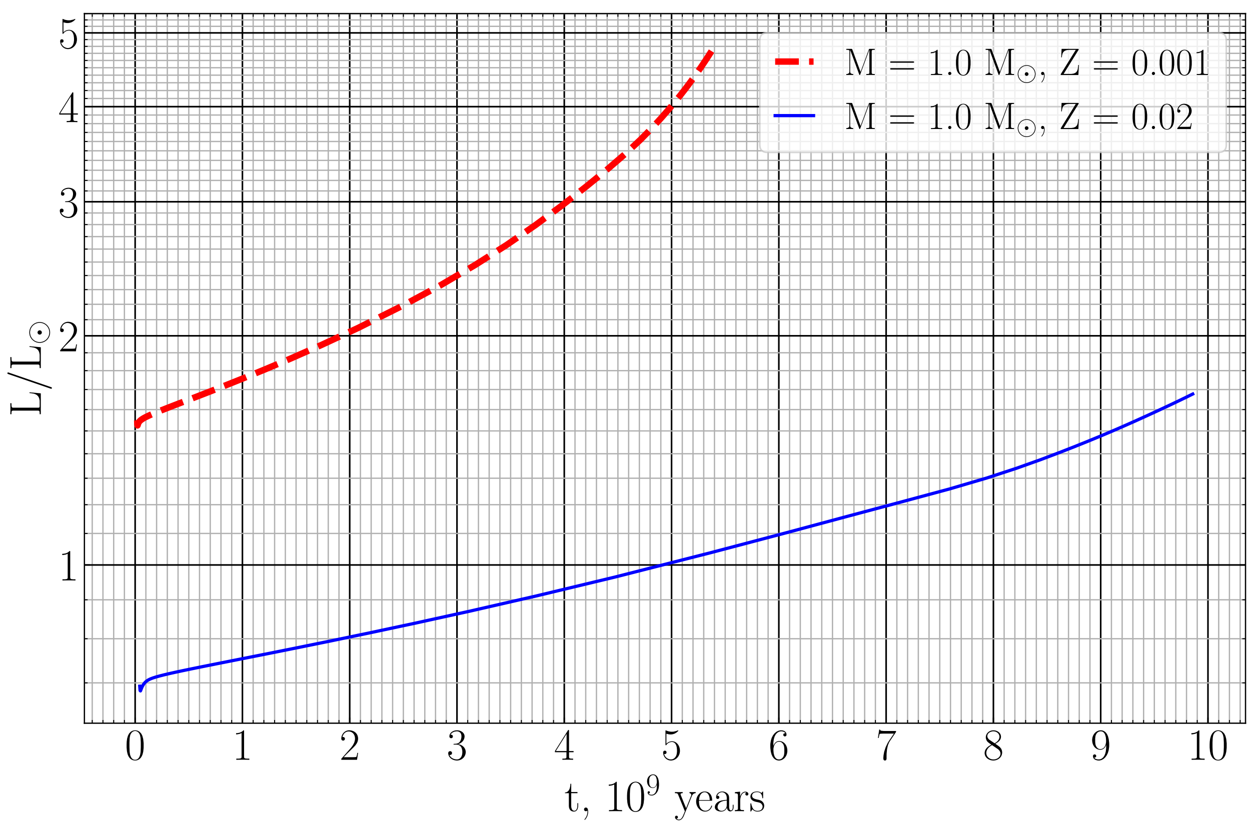


Рис. 4: Светимость звезд с массой 1 $M_\odot$ на стадии главной последовательности, Z – металличность звезды

Для Солнца можно считать, что массовая доля водорода при образовании звезды составляла 70%, а массовая доля гелия – 30%. Наличием других элементов в звёздах, потерей массы за счет звёздного ветра и других эффектов пренебречь. Масса протона составляет $1.6726 \cdot 10^{-27}$ кг, масса ядра гелия – $6.6447 \cdot 10^{-27}$ кг.

Решение.

В звездах типа Солнца водород превращается в гелий в результате ядерных реакций, называемых p-p циклом. В ходе одного такого цикла 4 протона превращаются в ядро гелия и выделяется энергия, подавляющая часть которой уносится излучением. Здесь и далее энергией, которую уносят 2 нейтрино за один цикл, пренебрежем.

Получим эту величину из данных, приведённых в условии задачи:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = (4m_p - m_{HE}) \cdot c^2 = 4.1 \cdot 10^{-12} \text{ Дж.}$$

Рассмотрим представленные графики. Площадь под кривой равна суммарной энергии, высвеченной звездой за время жизни на главной последовательности. Определим эту энергию для Солнца (нижняя кривая) за время 4.8 – 4.9 миллиарда лет и за всё время его нахождения на ГП. Современный возраст Солнца можно получить из графика, найдя время, при котором $L = 1\ L_\odot$.

Обратим внимание, что шкала по вертикальной оси имеет логарифмическую природу, поэтому данные с неё надо снимать аккуратно. Вероятная ошибка участника – это предположение, что светимость линейно растет со временем. Для наглядности предоставим график (рис. 5) в линейном масштабе на котором явно видно, что данное предположение не является верным.

Для вычисления площади разобьём логарифмическую кривую на несколько более-менее узких интервалов и определим площадь каждого как

$$S_i = \frac{L_i + L_{i-1}}{2} \cdot \Delta t_i$$

Номер	L_i	L_{i-1}	t	Δt	S_i
1	0.75	0.7	1	1	0.725
2	0.8	0.75	2	1	0.775
3	0.85	0.8	3	1	0.825
4	0.93	0.85	4	1	0.89
5	1	0.93	4.8	0.8	0.72
6	1.05	1	5	0.2	0.20
7	1.1	1.05	6	1	1.075
8	1.2	1.1	7	1	1.15
9	1.32	1.2	8	1	1.285
10	1.5	1.32	9	1	1.41
11	1.7	1.5	10	1	1.6

Отметим, что светимости здесь выражены в единицах светимости Солнца, а время – в миллиадрах (10^9) лет.

Суммируем значение площадей каждого столбца. За время жизни Солнца (4.8 миллиарда лет) площадь под кривой графика будет равна $3.935 \approx 3.9$ светимостей Солнца за 1 миллиард

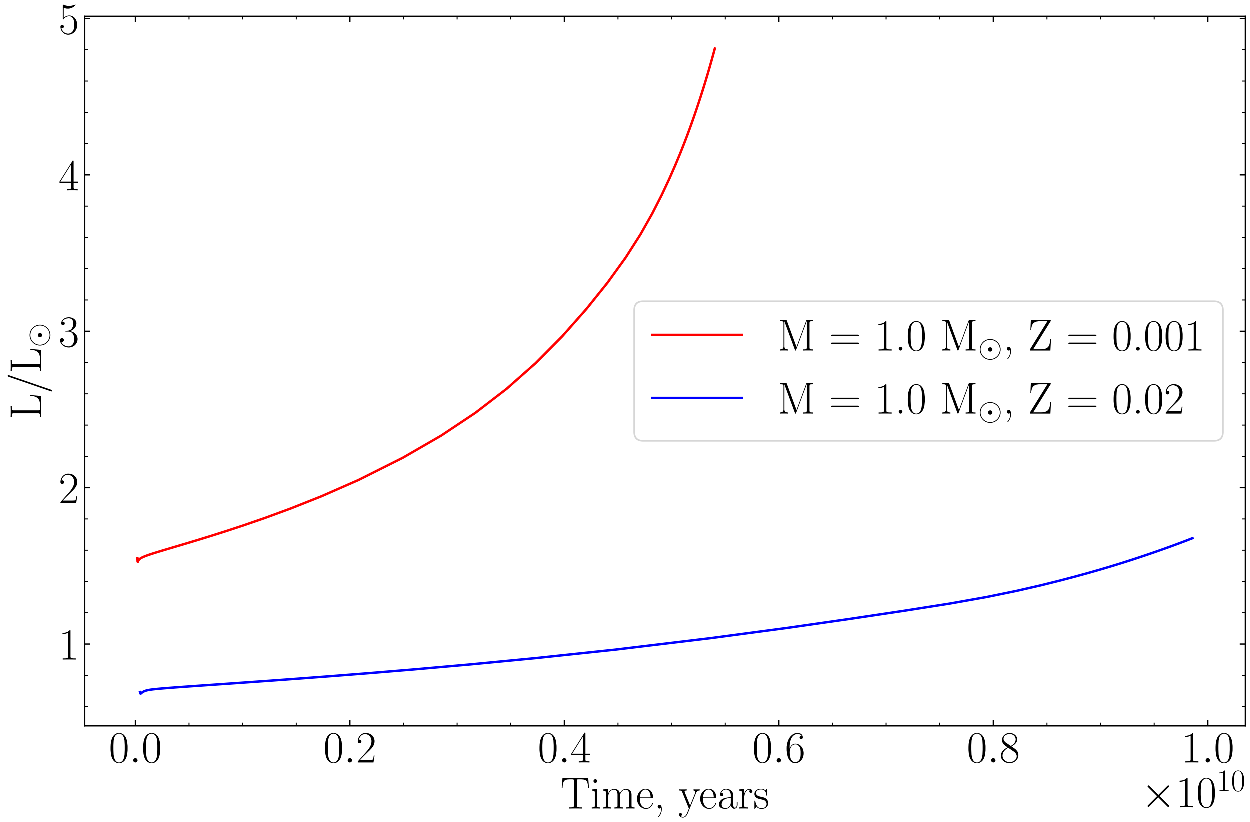


Рис. 5: Данные по светимости в линейном масштабе

лет. Переведём это в джоули и получим полную высвеченную энергию E_1

$$E_1 = 3.9 \cdot 3.88 \cdot 10^{26} \cdot 3.15 \cdot 10^{16} = 4.8 \cdot 10^{43} \text{ Дж}.$$

Число актов p-p цикла будет равно

$$N_1 = \frac{E_0}{4.1 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}} = \frac{4.6 \cdot 10^{44} \text{ Дж}}{4.1 \cdot 10^{-12} \text{ Дж}} \approx 1.16 \cdot 10^{55} \text{ актов}$$

А число протонов, преобразованных в гелий, будет в четыре раза больше:

$$N_{01} = 4N_1 = 4.66 \cdot 10^{55} \text{ протонов}$$

Изначально в Солнце 70% массы было в виде атомов водорода. Поэтому исходное их количество равно

$$N_0 = \frac{0.70 M_\odot}{m_p} = \frac{0.7 \cdot 2 \cdot 10^{30}}{1.67 \cdot 10^{-27}} = 8.4 \cdot 10^{56} \text{ атомов}$$

Оценим массу водорода, которая преобразовалась в гелий в Солнце к настоящему моменту:

$$M_{H|HE} = N_{01} \cdot m_p = 4.66 \cdot 10^{55} \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} = 7.8 \cdot 10^{28} \text{ кг} = \boxed{3.9\%\ M_\odot}$$

Полный интеграл под всей кривой равен 10.725 (светимостей Солнца за миллиард лет). Тогда число протонов, которые были преобразованы на Солнце в атомы гелия за всё время существования на ГП, равно

$$N_1 = 4\frac{E_1}{4.1 \cdot 10^{-12}\ \text{Дж}} = 4 \cdot \frac{10.725 \cdot 3.88 \cdot 10^{26} \cdot 3.15 \cdot 10^{16}}{4.1 \cdot 10^{-12}\ \text{Дж}} = 1.27 \cdot 10^{56}\ \text{шт.}$$

Тогда масса водорода, преобразованного в гелий, будет

$$M_{H|HE} = N_1 \cdot m_p = 2.04 \cdot 10^{29}\ \text{кг} = 10.6\%\ M_{\odot}.$$

Следовательно, массовые доли водорода и гелия в Солнце при выходе из ГП будут составлять 59.4% и 40.6% соответственно.

Проделаем ту же самую операцию для звезды, которая образовалась в ранней Вселенной. Такая звезда обладала меньшей металличностью, её светимость была заметно больше, а время жизни на главной последовательности – заметно меньше.

Номер	L_i	L_{i-1}	t	Δt	S_i
1	1.75	1.5	1	1	1.67
2	2.0	1.75	2	1	1.88
3	2.4	2.0	3	1	2.2
4	3.0	2.4	4	1	2.7
5	4	3.0	5	1	3.5
6	4.8	4	5.5	0.5	2.2

Площадь под кривой равна 14.15 светимостей Солнца за миллиард лет. Переведём эту величину в джоули:

$$E_2 = 14.15 \cdot 3.88 \cdot 10^{26} \cdot 3.15 \cdot 10^{16} = 1.7 \cdot 10^{44}\ \text{Дж}.$$

Число протонов, которые были преобразованы в атомы гелия, равно

$$N_2 = 4\frac{E_2}{4.1 \cdot 10^{-12}\ \text{Дж}} = 4 \cdot \frac{14.15 \cdot 3.88 \cdot 10^{26} \cdot 3.15 \cdot 10^{16}}{4.1 \cdot 10^{-12}\ \text{Дж}} = 1.7 \cdot 10^{56}\ \text{протонов},$$

что соответствует массе преобразованного в гелий водорода

$$M_{H|HE} = N_2 \cdot m_p = 2.8 \cdot 10^{29}\ \text{кг} = 14\%\ M_{\odot}$$

Наконец, ответим на вопрос C про количественную долю атомов водорода и гелия. Запишем отношение массовых долей водорода и гелия для Солнца при уходе с главной последовательности:

$$\frac{N_H m_p}{N_{HE} m_{HE}} = \frac{59.4\%}{40.6\%}$$

Выразим отсюда отношение числа атомов водорода к числу атомов гелия:

$$\frac{N_H}{N_{HE}} = \frac{59.4\%}{40.6\%} \cdot \frac{m_{He}}{m_p} \approx 5.85.$$

Следовательно, количественная доля атомов водорода в Солнце будет равна $\eta_H = 5.85/6.85 \approx 85\%$, а гелия $\eta_{HE} = 1/6.85 \approx 15\%$.

Критерии оценивания. **25**

При оценивании данной задачи пропагации ошибок нет.

К1. Определение энергии, которая выделяется при одном акте p-p цикла **1**

К2. Утверждение, что площадь под кривыми – это полная излучённая энергия **2**

К3. Снятие точек с диаграммы для Солнца **3**

Пункт оценивается, если снятые с графика значения верны.

Снято 5 и более точек 3

ИЛИ снято 3–4 точки 2

ИЛИ снято 2 точки 1

К4. Определена полная излучённая энергия Солнца до настоящего момента **3**

Верно использован возраст Солнца в диапазоне $4.5 - 5.0$ миллиардов лет 1

Получена энергия E_1 в джоулях или в электронвольтах 2

К5. Определена массовая доля водорода в Солнце, уже превратившегося в гелий **2**

Определено число актов p-p цикла 1

Получен численный ответ $3.9\% \pm 0.2\%$ 1

К6. Определена полная излучённая энергия Солнца за все время на ГП **2**

К7. Определена массовая доля водорода в Солнце, которая превратится в гелий **2**

К8. Снятие точек с диаграммы для низкометалличной звезды **3**

Снято 5 и более точек 3

ИЛИ снято 3–4 точки 2

ИЛИ снято 2 точки 1

К9. Определена полная излучённая энергия звезды за всё время на ГП **2**

К10. Определена массовая доля водорода в звезде, который превратится в гелий **2**

К11. Определена количественная доля водорода в звезде, который превратится в гелий .. **3**

Приведен корректный способ связи массовых и количественных долей 1

Получено верное значение доли для атомов водорода и гелия 2