

Московский институт открытого образования

## **Задачи Московской Астрономической олимпиады. 2003-2005**

Под редакцией О.С. Угольникова и В.В. Чичмаря

Материал подготовлен Центром по работе с одаренными и мотивированными детьми

МИОО, Москва, 2005

УДК 521

У 26

Задачи Московской Астрономической олимпиады. 2003-2005. Сборник под редакцией О.С. Угольникова, В.В. Чичмаря. М.: МИОО, 2005.

Сборник содержит 168 задач по астрономии для школьников, предлагавшихся на Московских олимпиадах по астрономии и физике космоса, проводившихся с 2003 по 2005 год, при подготовке команды Москвы к Всероссийским и Международным астрономическим олимпиадам, а также на открытой заочной олимпиаде. Кроме этого, приводится обзор 44 задач первых Московских астрономических олимпиад, проводившихся в середине XX века. Для каждой задачи приводится полное решение.

Книга предназначена для любителей астрономии, членов астрономических кружков и клубов, школьников, студентов, аспирантов, преподавателей средних школ и вузов, научных работников.

### **Редакторы:**

*Угольников Олег Станиславович* – научный сотрудник Института космических исследований РАН, председатель Предметной комиссии Московской городской астрономической олимпиады.

*Чичмарь Владимир Васильевич* – научный сотрудник Московского института открытого образования, председатель Организационного комитета Московской городской астрономической олимпиады.

ISBN 5-94898-062-6

© О.С. Угольников, В.В. Чичмарь, 2005 г.

© Издательство МИОО, 2005 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник является продолжением сборника «Московские Астрономические олимпиады. 1997-2002», изданного Московским институтом открытого образования в 2002 году. Прошедшие с того момента 3 года стали очень интересным и насыщенным временем с точки зрения астрономического олимпиадного движения в Москве. Уровень сложности Московской Астрономической олимпиады, который и ранее был одним из самых высоких среди всех существующих астрономических олимпиад, еще несколько вырос. Но, несмотря на это, результаты сильнейших работ участников олимпиады и острота борьбы между ними позволяют говорить об увеличении количества талантливых школьников, интересующихся астрономией. Это же подтверждает и заметное улучшение показателей выступления команды Москвы на Всероссийской и Международной астрономических олимпиадах.

Основным принципом формирования комплекта задач на Московскую олимпиаду по астрономии и физике космоса является необходимость охватить различные темы многообразной астрономической науки в каждом туре и в каждой возрастной группе. Традиционно Московская олимпиада проводится в два теоретических тура. В первый тур включаются более простые по своему построению задачи, требующие, прежде всего, определенного уровня знаний. Участникам, прошедшим во второй тур, предстоит проявить пространственное мышление, смекалку, владение основами метода оценок и приближенных вычислений. С одной стороны, подобные задачи позволяют жюри отметить одаренных школьников, а с другой – вызвать максимальный интерес и увлечение у самих участников.

Кроме задач Московской олимпиады по астрономии и физике космоса, предлагавшихся в 2003-2005 годах, в этом справочнике есть также раздел «Дополнительные задачи». Основу этого раздела составляют задачи, предлагавшиеся школьникам на сборах команды Москвы перед выступлением на Всероссийской и Международной астрономических олимпиадах. Некоторые из этих задач требуют высокого уровня физических и астрономических знаний, из-за чего они не были включены в программу олимпиад, но в то же время остаются интересными для рассмотрения со школьниками. В этот же раздел включено несколько задач Московской олимпиады прошлых лет.

Задачи открытой заочной олимпиады, включенные в следующую главу сборника, относятся к другому типу. Они не предполагают большего уровня знаний, чем на Московских олимпиадах, но некоторые из них отличаются особенной логической сложностью решения, требующего большего времени, что неосуществимо на очных олимпиадах. Астрономический тест, приводимый далее, позволит быстро и в занимательной для школьников форме оценить уровень их подготовки перед началом занятий. Наконец, последняя глава сборника посвящена истории Московской Астрономической олимпиады. В нее включены задачи шести самых первых олимпиад, которые проводились в 1947 – 1952 годах.

Автором большинства задач, включенных в сборник, является его редактор О.С. Угольников. Ряд задач для Московской олимпиады по астрономии и физике космоса и сборов школьников предложила Н.Н. Шахворостова, авторами нескольких задач Московской олимпиады 2003 года были А.В. Засов, В.В. Чичмарь и М.Г. Гаврилов. Составителями задач первых Московских олимпиад являлись Е.Я. Бугославская, Ф.Ю. Зигель, П.П. Паренаго, А.С. Шаров и В.А. Шишаков. Редакторы сборника выражают благодарность В.И. Цветкову за предоставление материалов о первых Московских олимпиадах по астрономии.

## МОСКОВСКАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ГЛАЗАМИ ЕЕ УЧАСТНИКОВ

*Каждый человек, которому довелось близко познакомиться с астрономией, наверняка согласится, что это – одна из самых интересных наук. Ученые, устраивающие олимпиады для любознательных школьников, стараются затронуть в них самые увлекательные вопросы той или иной науки. Получается, что астрономические олимпиады – самое увлекательное мероприятие на базе самой интересной науки. Это представление, конечно, несколько идеализированное, но из многих существующих в мире астрономических олимпиад для школьников именно Московская олимпиада по астрономии и физике космоса удовлетворяет ему больше всего.*

*Задачи этой олимпиады очень своеобразны. На мой взгляд, их отличительная черта состоит в уникальности, нетривиальности каждой задачи. Участвуя в других олимпиадах или пролистывая сборники, часто сталкиваешься с тем, что многие задачи либо повторяются, либо отличаются только цифровыми данными, либо пишутся по какому-то традиционному шаблону и в итоге могут оказаться уже настолько знакомыми интересующимся школьникам, что их решение не потребует от них особых мысленных усилий. Совсем другое дело – Московская астрономическая олимпиада. В каждой ее задаче есть нечто новое: свежая идея, необычная постановка вопроса, использование интересных фактов. При этом авторы каждый год пишут почти по 30 новых подобных задач. Кроме этого, задачи часто затрагивают другие области знаний, заметно расширяют кругозор: после написания олимпиады всегда хочется просмотреть литературу по вопросам, вызвавшим затруднение. Надо отметить и всегда четкую постановку вопроса, допускающую единственное верное толкование. Мне очень нравятся задачи, основанные на событиях, которые происходят на нашем небе вблизи даты проведения олимпиады. Единственное, что в задачах может расстраивать школьника – это то, что иногда среди них могут оказаться настолько сложные, что никто из участников в результате не может решить их до конца.*

*Во время проведения олимпиады чувства участников бывают весьма противоречивыми. Получив листочек с задачами, вначале быстро пробегаешь его глазами, глубоко не вдаваясь в их смысл. На первый взгляд многие задачи кажутся очень сложными, но по прошествии некоторого времени понимаешь, что их вполне можно решить. И ничто не может сравниться с удовлетворением, получаемым от завершенного решения. Но пока остаются нерешенные задачи, останавливаться нельзя. Ближе к концу олимпиады начинаешь ощущать внутреннюю красоту каждой задачи, и становится очень обидно, если какие-либо из этих задач решить не получилось. После окончания тура кладешь листок с условиями в сумку и в течение нескольких дней о нем не вспоминаешь. А потом в спокойной обстановке перечитываешь условия и еще раз понимаешь, насколько интересна каждая задача.*

*Мария Козловская,*  
победитель Московской олимпиады 2004 года,  
многократный победитель Всероссийской и Международной олимпиады.

*Московские олимпиады по астрономии и физике космоса часто выгодно отличаются от Всероссийских и Международных олимпиад. И связано это не только с тем, что они значительно проще в организации, но и с уровнем предлагаемых задач. Конечно, сравнение разумно проводить лишь с теоретическими турами, так как ни практический, ни наблюдательный туры в Москве не проводятся.*

*Насколько я могу судить по тем Всероссийским олимпиадам, в которых я участвовал, типичной для их теоретического тура является следующая ситуация: большинство задач достаточно просты, и их решения сводятся к применению одной элементарной формулы. Как правило, лишь одна задача из всего тура оказывается сложной и интересной. Ещё одна сложная задача ожидает участников на практическом туре, который, однако, выходит из рамок сравнения с Московской олимпиадой.*

*К сожалению, на Московской олимпиаде тоже часто встречаются тривиальные задачи, относительное количество которых, хотелось бы верить, со временем будет уменьшаться. Однако сложных, захватывающих задач здесь больше, почти не встречаются задачи, более близкие к элементарной школьной физике, нежели к астрономии. Подводя итог, можно сказать, что Московская олимпиада сложнее Всероссийской и не уступает Международной.*

*Есть у Московской олимпиады и ещё одно не столь значительное, но приятное преимущество: на ней регулярно появляются астрофизические задачи, которых, например, на Девятой Международной астрономической олимпиаде не было вовсе.*

*Хочется верить, что и впредь Московская олимпиада по астрономии и физике космоса будет сохранять свой высокий уровень сложности и что это не отпугнёт новые поколения молодых астрономов.*

**Андрей Попов,**  
победитель Московской олимпиады 2003, 2004 и 2005 годов,  
победитель Открытой Заочной олимпиады 2005 года,  
победитель Всероссийской и Международной олимпиады.

*Московская олимпиада по астрономии и физике космоса – самая давняя астрономическая олимпиада в мире. Первая Московская астрономическая олимпиада проходила в 1947 году, и в ней участвовали несколько десятков школьников. С тех пор она проводится ежегодно и с каждым годом собирает все больше участников. Даже сейчас, с появлением олимпиад более высокого уровня она не утратила своего былого значения, прежде всего потому, что задачи Московской олимпиады не только не уступают по уровню сложности задачам Всероссийской и Международной олимпиад, но и нередко превосходят их.*

*В Московской олимпиаде побеждает тот, кто сможет догадаться до идеи решения самых сложных и нестандартных задач, оценки за которые часто определяют окончательный итог. На Всероссийских и Международных олимпиадах ситуация несколько отличается: теоретически задачи там не представляют большой сложности для участников, закалённых в региональных соревнованиях, и на первый план выходит качество и аккуратность решения, точность вычислений. Конечно, настоящий учёный должен уметь все делать чётко и стройно, но без новых, оригинальных, неординарных идей наука стояла бы на месте. Поэтому можно сказать, что Московская олимпиада поощряет в первую очередь людей, способных в будущем двигать науку вперед. Именно такие люди с годами могут стать первооткрывателями, авторами новых теорий.*

*Попробуйте свои силы в астрономии!*

**Андрей Власов,**  
победитель Московской олимпиады 2002, 2004 и 2005 годов,  
победитель Открытой Заочной олимпиады 2005 года,  
призер Всероссийской и Международной олимпиады.

## УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

### Часть 1. 57 Московская Астрономическая Олимпиада (2003 год)

#### I ТУР

##### *7 класс и моложе*

- 1.1. В опере итальянского композитора Джакомо Пуччини «Мадам Батерфляй» (Чио-Чио-сан) один из героев (Пинкертон) в первом действии спектакля поет следующее: «И тысяча звезд на нас смотрит своими глазами». Подтвердите или опровергните слова Пинкертона с астрономической точки зрения.
- 1.2. Массы и размеры Луны и Титана (спутника Сатурна) примерно равны, но у Титана есть атмосфера, а у Луны ее быть не может. Почему?
- 1.3. В учебнике астрономии А.В. Засова и Э.В. Кононовича показано, что орбиты Нептуна и Плутона пересекаются. Значит ли это, что когда-нибудь планеты столкнутся? Почему этого не произошло до сих пор? Орбитальный период Нептуна равен 165, а Плутона – 248 годам.
- 1.4. Через какие промежутки времени целесообразно запускать к Венере космические корабли?

##### *8-9 классы*

- 1.5. Внутренняя планета А и внешняя планета В при наблюдении с Земли имеют одинаковый синодический период  $S$ . Чему равен синодический период планеты А при наблюдении с планеты В?
- 1.6. Радиант метеорного потока имел координаты  $\alpha = 18^{\text{ч}}$ ,  $\delta = +65^{\circ}$ , а сам поток был активен 12 часов. Оцените ширину этого метеорного потока.
- 1.7. Мы находимся в северном полушарии и наблюдаем восход звезды А со склонением  $-8^{\circ}$ , и в это же время заходит звезда В со склонением  $+16^{\circ}$ . Что произойдет раньше: ближайший заход звезды А или восход звезды В?
- 1.8. Известно, что время наступления океанских приливов каждый день смещается примерно на 50 минут. Почему?

##### *10-11 классы*

- 1.9. Один начинающий любитель астрономии рассказывал, что видел, как звезды «летели снизу вверх». Возможно ли такое? Ответ обоснуйте.
- 1.10. Почему земные приливы на Луне примерно в 20 раз сильнее, чем лунные на Земле, хотя массы Земли и Луны отличаются в 81 раз?
- 1.11. Во время наибольшей элонгации Венеры в некоторой точке Земли Солнце видно на юге, а Венера на той же высоте на севере. Может ли такое быть, если да, то в каких широтных областях Земли и на какой высоте над горизонтом находились Солнце и Венера? Решите ту же задачу для случая, когда Солнце находится на западе, а Венера на той же высоте на востоке.
- 1.12. Затменная переменная состоит из двух звезд с одинаковым блеском  $6^{\text{m}}$  и температурами поверхности 5000К и 10000К. Чему равен блеск переменной в моменты главного и вторичного

минимумов блеска и вне затмений? Считать, что поверхностная яркость звезды одинакова по всему ее диску, а Земля находится точно в плоскости орбит звезд.

## II ТУР

### 7 класс и моложе

1.13. В один и тот же день были зарегистрированы следующие события (время – всемирное):

- событие А - землетрясение в Японии в 12 час 02 мин;
- событие В - образование пятна на Солнце в 12 час 10 мин;
- событие С - вспышка на Солнце в 12 час 12 мин.

Что можно сказать о последовательности этих событий во времени?

1.14. Где будет находиться Солнце, если мы будем наблюдать его из окрестностей Сириуса?

1.15. Принимая длину экватора Земли равной 40000 км, найдите ошибку (в км) долготы положения на экваторе, если долгота определяется из показаний часов с ошибкой во времени 1 мин.

1.16. В первый день Нового Года произошло покрытие Марса Луной, которое началось в полночь, а закончилось одновременно с заходом Луны. Произойдет ли в начавшемся году противостояние Марса?

1.17. В 2003 году Юпитер вступил в противостояние в начале февраля. Как в этом месяце день от дня изменяется его максимальная высота над горизонтом на широте Москвы?

### 8-9 классы

1.18. Эратосфен в 250 году до нашей эры определил, что Солнце находится в Сиене (ныне Асуан) в зените в тот момент, когда в Александрии оно расположено на  $7^{\circ}12'$  южнее зенита. Расстояние между пунктами наблюдений составляло 5000 стадий. Определите, чему равна одна стадия.

1.19. В созвездии Дракона открыта новая комета, находящаяся на расстоянии 6 а.е. от Земли. Расчеты орбиты показали, что она сильно вытянута, и через некоторое время комета окажется на минимальном расстоянии (0.5 а.е.) от Солнца и станет видна невооруженным глазом. В каком полушарии Земли она будет лучше видна в это время?

1.20. Сколько раз переворачивается в трехмерном пространстве картинка небесного объекта при визуальных наблюдениях в телескоп-рефрактор с окуляром Гюйгенса?

1.21. Находясь в северном полушарии, мы 22 декабря наблюдаем парадоксальное явление: планета Венера, находясь в точке наибольшей элонгации, восходит точно на юге. В каких широтах мы находимся, и какая элонгация у Венеры – восточная или западная? Где в это время находилось Солнце?

1.22. (К 300-летию Санкт-Петербурга)

31 мая 2003 года, в день 300-й годовщины со дня основания Санкт-Петербурга, практически на всей территории России произойдет частное солнечное затмение. В Санкт-Петербурге оно произойдет ранним утром, и Солнце превратится в серп с рогами, направленными вверх. Как будет изменяться момент наибольшей фазы затмения и значение наибольшей фазы с удалением от Санкт-Петербурга в восточном направлении?

### *10-11 классы*

1.23. Вы стали свидетелем редкого явления – покрытия Марса Луной во время великого противостояния Марса. В каком полушарии Земли вы находитесь?

1.24. Где в космосе образовались химические элементы, из которых состоит ваша любимая кошечка? Золотая статуэтка любимой кошечки? Алмазные подвески на статуэтке любимой кошечки?

1.25. Звезда Капелла относится к тому же спектральному классу, что и Солнце. Расстояние до нее равно 13 пк, а на нашем небе она выглядит как звезда  $0.1^m$ . На каком расстоянии от Капеллы должна находиться планета со средней плотностью  $1 \text{ г/см}^3$ , чтобы условия на ее поверхности были схожи с земными? Какая масса должна быть у этой планеты?

1.26. Межпланетный космический аппарат приближается к Юпитеру. Выполнив гравитационный маневр вблизи этой планеты, аппарат начинает удаляться от нее, имея скорость, большую, чем до сближения, хотя его двигатели во время маневра не включались. С какой стороны от Юпитера на земном небе находился аппарат до сближения с ним? После сближения?

1.27. Методами интерферометрии удалось измерить угловой диаметр звезды с блеском  $4.7^m$ , который оказался равен  $0.004$  угловой секунды. Спектроскопические наблюдения этой звезды показали, что желтая линия натрия ( $5890 \text{ \AA}$ ) имеет две компоненты – яркую и слабую, причем длина волны слабой компоненты изменяется синусоидально с амплитудой  $0.6 \text{ \AA}$  и периодом 30 лет, а один раз за этот период слабая линия вообще исчезает на 230 дней. Оцените расстояние до звезды, ее массу и температуру поверхности. К какому типу звезд она относится?

## Часть 2. 58 Московская Астрономическая Олимпиада (2004 год)

### I ТУР

#### *7 класс и моложе*

- 2.1. В 2004 году произойдет астрономическое явление: прохождение Венеры по диску Солнца. С какой стороны солнечного диска появится Венера? Можно ли будет увидеть ее невооруженным глазом?
- 2.2. Две разные звезды одновременно взошли и одновременно зашли за горизонт. Где на Земле находится наблюдатель?
- 2.3. После захода Солнца над восточным горизонтом появилась яркое звездообразное светило. Что это может быть?
- 2.4. Как-то раз школьник рассказал своему другу, что во время полного солнечного затмения он видел на потемневшем небе несколько ярких звезд, Венеру, Юпитер и серп Луны, на котором прекрасно были видны даже крупные кратеры. Как вы думаете, не обманывал ли школьник своего друга?

#### *8-9 классы*

- 2.5. На весенние каникулы московский школьник Ваня решил съездить в Петербург. Хорошо побывать в этом прекрасном городе, полюбоваться его видами. Спустившись к Неве около Петропавловской крепости, Ваня прогуливался вдоль крепостной стены. Кое-где Нева еще была покрыта тонким льдом, а на земле еще лежал мартовский снег. Но тут Ваня увидел любопытное зрелище – вдоль стены стояло множество людей в купальниках и плавках, загорающих на солнце! Этим людям совершенно не было холодно, им было очень тепло и приятно, несмотря на то, что под ногами лежал снег, стена была очень теплой. А вот сидеть было очень холодно. Объясните, почему.
- 2.6. В желтых лучах звезды **A** и **B** светят одинаково, а в красных лучах звезда **B** на  $0.1^m$  ярче, чем звезда **A**. Какая из звезд горячее?
- 2.7. Сколько времени проходит от восхода до захода Луны на экваторе? Рефракцией и параллаксом пренебречь.
- 2.8. Как известно, Солнце движется вокруг центра Галактики со скоростью около 250 км/с, и в настоящий момент это движение происходит в направлении созвездия Цефея. Почему же во многих книгах написано, что апекс движения Солнца находится в созвездии Геркулеса?

#### *10-11 классы*

- 2.9. 8 июня 2004 года произойдет прохождение Венеры по диску Солнца. Насколько могут отличаться моменты первого контакта дисков Солнца и Венеры при наблюдении из разных областей Земли?
- 2.10. Как известно, самый короткий день в северном полушарии приходится на 22 декабря. Однако позже всего восход Солнца на широте Москвы происходит вблизи Нового Года. В чем причина кажущегося несоответствия? Как будет изменяться дата самого позднего восхода Солнца при движении на север и на юг?



2.11. Во время полнолуния мощная пушка, установленная на Луне, наводится на центр диска Земли и выпускает снаряд, летящий со скоростью 80 км/с. Достигнет ли снаряд поверхности Земли?

2.12. В далекой галактике вспыхнула сверхновая звезда. Ее блеск в максимуме составил  $22^m$ . Линия водорода H $\beta$ , наблюдавшаяся в ее спектре, совместилась с линией H $\alpha$  лабораторного водородного стандарта. Какой блеск имела бы эта сверхновая, находись она вблизи центра нашей Галактики, на расстоянии 8 кпк от Солнца? Лабораторные длины волн линий H $\alpha$  и H $\beta$  равны 6563 и 4861 ангстрем, постоянная Хаббла равна 65 км/(с·Мпк). Межзвездным и межгалактическим поглощением пренебречь.

## II ТУР

### *7 класс и моложе*

2.13. Вернувшись из долгого путешествия, юный натуралист рассказал своим друзьям очень много интересных и удивительных историй. Но друзья, никогда не выезжавшие за пределы родной страны, не поверили в некоторые из его историй. А поверите ли в них Вы?

1) "...Есть город, в котором день равен ночи круглый год, а иногда в полдень стоящие на земле предметы не отбрасывают теней!..."

2) "...А в одной из стран Солнце в течение дня находится все время в северной части неба..."

3) "...А еще я был в стране, где у серпа Луны ночью рога всегда направлены вверх..."

2.14. Венера вступила в тесное соединение с Марсом. У какой из двух планет видимый диаметр в это время больше?

2.15. Метеоры какого из двух октябрьских метеорных потоков – Драконид или Орионид – более быстрые и почему?

2.16. Во время противостояния внешней планеты она была хорошо видна в течение ночи прямо в гуще Млечного Пути. В какой сезон года произошло противостояние планеты, и в каком созвездии она наблюдалась?

2.17. Два покрытия Марса Луной произошли с интервалом в 26.5 дней. Какой (примерно) была фаза Луны во время этих покрытий?

### *8-9 классы*

2.18. Две звезды имеют координаты  $\alpha = 18^h$ ,  $\delta = +5^\circ$  и  $\alpha = 6^h$ ,  $\delta = +35^\circ$ . Можно ли наблюдать первую и вторую звезду на ночном небе на Северном полярном круге на востоке? на юге? на западе? на севере?

2.19. Звезда Вега имеет собственное движение 0.35" в год, параллакс 0.129" и лучевую скорость –14 км/с. Через сколько лет Вега окажется к нам вдвое ближе, чем сейчас?

2.20. Жители далекой планеты терпят бедствие. Космический спасательный корабль с контейнером с медикаментами и продовольствием обращается вокруг этой планеты по круговой орбите. В некоторый момент контейнер массой 1 тонна отстреливается от корабля так, что после этого он падает по вертикали на поверхность планеты, раскрывая специальный парашют перед посадкой, а сам корабль улетает от планеты по параболической орбите. Определите массу корабля.

2.21. Астероид обращается вокруг Солнца по круговой орбите, лежащей в плоскости эклиптики. По удивительному совпадению в каждое противостояние Марса этот астероид тоже оказывается в противостоянии с Солнцем. Чему равен радиус его орбиты? Орбиты Земли и Марса считать круговыми.

2.22. «Предположим, сегодня произойдет полное лунное затмение с большой фазой, во время которого Луна пройдет через центр земной тени. За считанные секунды до начала частного теневого затмения произойдет покрытие Луной некоторой звезды. Покрытие будет также центральным, то есть через какое-то время звезда пройдет за центром видимого диска Луны. Очевидно, что покрытие звезды произойдет у восточного лимба Луны, который в это же время ближе всего подойдет к западному краю земной тени. Земная тень на небесной сфере представляет собой диск, размеры которого в течение затмения практически не изменяются, а центр находится в точке, противоположной Солнцу, и медленно движется относительно звезд с запада на восток. Следовательно, в течение покрытия западный край земной тени будет постепенно удаляться от звезды, и ее выход из-за диска Луны в нашем наблюдательном пункте произойдет до начала полного затмения и будет наблюдаться у того края диска Луны, который еще не погрузится в тень Земли».

Справедлив ли вывод автора, и если нет, то где кроется ошибка в его рассуждениях?

### 10-11 классы

2.23а. (для 10 класса) В день весеннего равноденствия на Земле наблюдается солнечное затмение. Для наблюдателя, находящегося на экваторе, оно начинается на восходе Солнца, а диск Луны вступает на солнечный диск точно сверху. Каким будет затмение в данной точке Земли? В каком полушарии Земли фаза солнечного затмения будет наибольшей?

2.23б. (для 11 класса) Частное солнечное затмение наступает в день весеннего равноденствия и видно в северном полушарии Земли. На какой широте и в какое время суток будет видна его наибольшая фаза, если затмение происходит вблизи нисходящего узла лунной орбиты? вблизи восходящего узла лунной орбиты?

2.24. Во время периода вечерней видимости планета Венера дважды вступила в соединение с Марсом. Могла ли Венера оказаться в точке наибольшей восточной элонгации:

- а) до первого соединения с Марсом?
- б) между двумя соединениями с Марсом?
- в) после второго соединения с Марсом?

2.25. Малая планета обращается вокруг Солнца по круговой орбите. Хотя плоскость этой орбиты совпадает с плоскостью эклиптики, на Земле никогда не наблюдаются покрытия данной планеты Луной. Определить радиус орбиты малой планеты.

2.26. Затменная переменная звезда большую часть времени имеет блеск  $4.6^m$ , однако каждые 45.5 дней ее блеск ослабевает до  $4.7^m$ . Параллакс звезды составляет  $0.01''$ . Спектральные измерения лучевых скоростей показали наличие двух компонент с амплитудами  $\pm 15$  км/с у более яркой и  $\pm 105$  км/с у более слабой компоненты, период их изменения был равен периоду колебаний блеска. Дальнейшие исследования показали, что яркая компонента является звездой-гигантом, вещество которого перетекает на спутник – белый карлик, образуя вокруг него аккреционный диск. Оцените темп аккреции вещества гиганта на белый карлик (в массах Солнца в год), считая орбиты звезд круговыми и принимая радиус белого карлика равным радиусу Земли.

2.27. Экспедиция межзвездного корабля прибыла на планету, обращающуюся вокруг далекой звезды по круговой орбите, и высадилась на ее северное полушарие ( $60^\circ$  с.ш.). Хотя температурные условия на поверхности планеты были очень похожи на земные, наблюдавшаяся в

пункте посадки картина поразила даже весьма опытных путешественников. Центральное светило заходило каждый раз точно на западе, причем ровно через 16.14 земных суток после предыдущего захода, а вот восходило попеременно на севере и на юге! Оцените наклон экватора планеты к плоскости орбиты, а также определите ее расстояние от звезды, период обращения и массу самой звезды, если известно, что данная звезда относится к главной последовательности, и для таких звезд светимость пропорциональна третьей степени массы.

### **Часть 3. 59 Московская Астрономическая Олимпиада (2005 год)**

#### **I ТУР**

##### *7 класс и моложе*

- 3.1. Звезда кульминировала в 00ч00м, а зашла в 07ч00м. В какое время произойдет ее ближайший восход?
- 3.2. Яркая комета видна на небе рядом с Венерой, имеющей вид тонкого серпа. Как расположен серп Венеры относительно направления хвоста кометы?
- 3.3. Можно ли увидеть невооруженным глазом Меркурий в Санкт-Петербурге 22 июня, если он в это время находится в верхнем соединении? в нижнем соединении? в наибольшей западной элонгации? в наибольшей восточной элонгации?
- 3.4. Как известно, в далеком инфракрасном диапазоне спектра планеты Солнечной системы и их спутники сами могут излучать энергию. Когда Луна бывает ярче в инфракрасных лучах – в первой или последней четверти?

##### *8-9 классы*

- 3.5. Предположим, в день весеннего равноденствия планета Венера оказалась в точке наибольшей восточной элонгации, находясь при этом вблизи эклиптики. На каких широтах Земли Венеру удастся увидеть на небе, когда на нем не будет Солнца? Атмосферной рефракцией пренебречь.
- 3.6. Искусственный спутник Земли имеет массу 100 кг и обращается вокруг Земли по круговой орбите с радиусом, равным среднему расстоянию Луны от Земли. Спутник состоит из двух одинаковых частей, соединенных стержнем. По команде с Земли в стержне срабатывает импульсный двигатель, отстреливающий две части друг от друга. Какая энергия требуется, чтобы после такого маневра из окрестностей Земли улетела одна из двух частей спутника? обе части спутника? Какое направление импульса энергетически более выгодно в первом и во втором случаях?
- 3.7. В пункте **A** в зените наблюдается метеор, имеющий блеск  $0^m$ . В пункте **B** этот же метеор был виден на высоте  $30^\circ$  над горизонтом. Какой блеск был у него в этом пункте? Поглощением света в атмосфере пренебречь.
- 3.8. Как известно, один тропический год – это промежуток между двумя последовательными моментами весеннего равноденствия. Сколько тропических лет проходит между последовательными покрытиями Солнцем какой-нибудь далекой звезды, находящейся вблизи эклиптики?

## 10-11 классы

3.9. Звезда А видна один час после наступления темноты на широте Москвы 1 февраля, а у звезды В такие же условия видимости наступают 1 августа. Какая из этих звезд будет дольше видна на широте Москвы по вечерам после этих дат?

3.10. Что происходит чаще и во сколько раз: прохождения Венеры по диску Солнца или прохождения Венеры за диском Солнца?

3.11. У затменной переменной звезды глубина главного и вторичного минимумов составляет соответственно  $0.55^m$  и  $0.11^m$ . Определите, если это возможно: отношение масс, отношение радиусов, отношение эффективных температур и отношение светимостей двух звезд, входящих в систему. Потемнением дисков звезд к краю пренебречь.

3.12. Вокруг далекой звезды по круговой орбите обращается двойная планета, состоящая из двух одинаковых тел со средней плотностью, равной средней плотности звезды. Планеты обращаются вокруг общего центра масс по круговой орбите так, что тень одной из них всегда падает по нормали на другую планету. Определите фазу теневого затмения второй планеты, считая, что размеры и массы обеих планет несравнимо меньше размеров и массы звезды.

## II ТУР

### 7 класс и моложе

3.13. Перечислите все небесные объекты, которые можно одновременно увидеть невооруженным глазом с северного и южного полюсов Земли.

3.14. Почему безлунные ясные ночи на широте Москвы оказываются самыми темными в апреле – начале мая?

3.15. В один момент времени Венера оказалась в наибольшей восточной элонгации как для землян, так и для наблюдателей на Марсе. На каком угловом расстоянии от Солнца был виден Марс на Земле в этот момент? Орбиты всех трех планет считать круговыми.

3.16. Одна двойная звезда состоит из двух звезд  $2^m$ , а другая – из одной звезды  $1^m$  и одной звезды  $3^m$ . Какая из этих пар ярче?

3.17. На одном из информационных Интернет-сайтов заметка о предстоящем астрономическом явлении была проиллюстрирована данной фотографией. Откуда могла быть сделана фотография, и какая фаза была в этот момент у Луны для наблюдателей на Земле?



### 8-9 классы

3.18. Касательное покрытие Марса Луной наблюдается в зените на рассвете. Найти ширину полосы видимости частного покрытия Марса Луной.

3.19. Что энергетически проще – запустить межпланетный аппарат к Венере или запустить тот же аппарат к Марсу? Орбиты Венеры, Земли и Марса считать круговыми.

3.20. Во время солнечного затмения в некотором пункте Земли на самом горизонте виден диск Солнца с маленьким ущербом точно снизу. Возможно ли наблюдение в этом пункте полного солнечного затмения?

3.21. На далекой обитаемой планете в нашей Галактике у астрономов-наблюдателей нет спектральных приборов, но есть фотометр, регистрирующий изменения яркости светил, количественно равные яркости одной звезды  $20^m$ . На каком расстоянии от Солнца с помощью такого прибора можно установить существование у Солнца планетной системы?

3.22. В некоторой точке Земли ведутся наблюдения за искусственным спутником Земли, двигающимся по круговой орбите. В точке наблюдения спутник описывает узкую «восьмерку», регулярно проходя через зенит, затем почти вертикально опускаясь вниз, касаясь горизонта и вновь поднимаясь наверх к зениту. На какой широте ведутся наблюдения?

### 10-11 классы

3.23. Светлой июньской ночью на широте  $60^\circ$  с.ш. скоростной поезд-экспресс движется со скоростью 120 км/ч в северном направлении. В какое местное время его пассажиры зафиксируют истинную солнечную полночь – самый темный момент ночи? Уравнением времени пренебречь.

3.24. 1 мая наступило противостояние Марса. В некоторой точке Земли в момент противостояния Солнце и Марс одновременно взошли над горизонтом. Найдите широту данной точки и определите, над какими сторонами горизонта располагались Солнце и Марс. Наклоном плоскости орбиты Марса к эклиптике и рефракцией пренебречь.

3.25. Каким должен был быть радиус круговой лунной орбиты, чтобы на Земле иногда исчезали приливы и отливы? Какова была бы периодичность таких «исчезновений»?

3.26. Яркая туманность размером  $1^\circ$  представляет собой остаток вспышки сверхновой, произошедшей 10 тысяч лет назад. Сквозь туманность хорошо видны более далекие объекты, а в ее спектре видна яркая широкая линия водорода  $H\alpha$ , занимающая область длин волн от 6541 до 6585 ангстрем. Туманность подсвечивается находящейся неподалеку очень горячей звездой спектрального класса O, имеющей блеск  $3^m$ . Оцените радиус этой звезды.

3.27. *«Мощный радиопередатчик был установлен на Луне точно в центре ее видимого полушария 24 декабря, в тот же день, когда на экваторе Земли наблюдалось продолжительное полное солнечное затмение. На следующий день первые сигналы были приняты во многих пунктах нашей страны, в том числе и за полярным кругом. А через неделю лунная станция отправила землянам поздравление с наступающим Новым Годом».*

В какую область диска Луны нужно было навести узконаправленные антенны, чтобы получить новогодние поздравления?

## Часть 4. Дополнительные задачи

### *Видимое движение небесных тел*

- 4.1. Звезда взошла в  $00^{\text{h}}01^{\text{m}}$  по местному времени. Сколько раз она пересечет горизонт в данном пункте в эти сутки?
- 4.2. Сколько будет длиться на Северном полюсе восход Солнца? восход Луны?
- 4.3. Как известно, короче всего гражданские сумерки длятся в начале марта, перед весенним равноденствием, и в начале октября, после осеннего равноденствия. Почему?
- 4.4. Во второй половине марта планета Меркурий находится точно на эклиптике, в  $10^{\circ}$  к востоку от Солнца. На какой широте ее легче всего найти невооруженным глазом или в бинокль?
- 4.5. Наблюдатель фиксирует вид неба регулярно в одно и то же звездное время и постоянно видит Солнце на горизонте. Где находится наблюдатель и чему равно звездное время?
- 4.6. Поезд движется со скоростью 60 км/ч на восток вдоль параллели  $60^{\circ}$  с.ш. Какую продолжительность светлого времени суток зафиксирует пассажир этого поезда 21 марта? Рефракцией пренебречь.
- 4.7. Планета обращается по круговой орбите вокруг звезды с постоянной светимостью. В некоторой точке поверхности планеты наблюдается парадоксальная ситуация – в холодный сезон года продолжительность светлого времени суток значительно больше, чем в теплый! Может ли такое быть, и если да, то в какой точке планеты и при каких условиях?

### *Атмосферы Земли и планет*

- 4.8. На северном полюсе Земли проводятся наблюдения Солнца в моменты весеннего и осеннего равноденствий. Когда Солнце будет видно выше над горизонтом? Величину атмосферного давления считать одинаковой в обоих случаях.
- 4.9. В каких случаях светила мерцают, а в каких – нет и почему: звезды при наблюдении невооруженным глазом, планеты при наблюдении невооруженным глазом, звезды при наблюдении в крупный телескоп, планеты при наблюдении в крупный телескоп.
- 4.10. Определите, при какой глубине погружения Солнца под горизонт будут видны серебристые облака над Солнцем на высоте  $10^{\circ}$  над горизонтом. В какие даты эти облака могут наблюдаться всю ночь на широте Москвы? Высоту облаков считать равной 83 км, рефракцией пренебречь.
- 4.11. Рассчитайте высоту сухой адиабатической атмосферы для Венеры, Земли и Марса.
- 4.12. Как вы думаете – если бы на Венере условия стали пригодными для жизни, как это сказалось бы на ее блеске на земном небе? А как изменился бы блеск Марса, если бы он мог быть обитаемым?

### *Движение Луны, покрытия и затмения*

- 4.13. Оцените максимальную продолжительность покрытия звезды Луной.

4.14. Найдите минимальное склонение звезды, покрытие которой Луной может наблюдаться с поверхности Земли. На какой широте Земли и на какой высоте над горизонтом будет наблюдаться это покрытие?

4.15. В течение всей полной фазы солнечного затмения около экватора Солнца был виден яркий протуберанец. Оцените его минимальный размер, если ширина полосы полной фазы составляла 150 км, и оно наблюдалось вблизи зенита.

4.16. Определите минимальный радиус сферы вокруг центра Земли, в которой в каждое новолуние будет наблюдаться полное солнечное затмение.

4.17. Оцените, на какой широте Земли может наблюдаться полное солнечное затмение с максимально возможной продолжительностью.

4.18. 1 июля 2011 года в акватории между южной Африкой и Антарктидой произойдет частное солнечное затмение с небольшой фазой, которое откроет новую последовательность солнечных затмений (в предыдущий раз, 20 июня 1993 года, затмения не произошло). У какого из узлов лунной орбиты произойдет это затмение? Оцените, до какого века будет продолжаться данная последовательность. Эксцентриситетом орбиты Луны пренебречь.

4.19. По существующей теории движения Луны, через какое-то время Земля и Луна будут вращаться вокруг своих осей с одинаковым периодом и будут обращены друг к другу одной стороной (как Плутон и Харон в настоящее время). Какими будут расстояние от Земли до Луны и период обращения Луны вокруг Земли в это время? При решении задачи Землю и Луну считать однородными шарами, момент импульса вращения которых равен  $0.4 \cdot MR^2 \omega$ , где  $M$ ,  $R$  и  $\omega$  – масса, радиус и угловая скорость вращения вокруг шара своей оси.

#### ***Движение искусственных спутников и космических аппаратов***

4.20. Для целей связи понадобился запуск искусственного спутника Земли, который находился бы максимально возможное время вблизи зенита в Москве. Какой должна быть орбита этого спутника?

4.21. Рассчитайте “третью космическую скорость” – минимальную скорость старта космического корабля с Земли, чтобы он мог без последующих затрат энергии навсегда покинуть Солнечную систему.

4.22. Сегодня на Земле был произведен запуск космического аппарата к Марсу по орбите, касающейся орбит Земли и Марса. В какой конфигурации сегодня находится Марс? Орбиты Земли и Марса считать круговыми.

4.23. Межпланетный аппарат совершает пассивный (без включения двигателей) гравитационный маневр вблизи Юпитера. Подлетая к Юпитеру с утренней (восточной) стороны, аппарат разворачивается на  $90^\circ$  и улетает от Юпитера с относительной скоростью, направленной точно от Солнца. В результате этого маневра аппарат, двигаясь по параболе, через некоторое время покидает Солнечную систему. Как двигался аппарат относительно Солнца до гравитационного маневра? Как вы думаете, можно ли совершить такой маневр вблизи Земли?

#### ***Конфигурации и видимость планет***

4.24. На какой максимальной высоте над горизонтом можно найти Меркурий невооруженным глазом? В какой сезон и на каких широтах это может произойти? Считать, что Меркурий становится видимым на сумеречном небе при погружении Солнца под горизонт, равном  $6^\circ$ .

4.25. Предположим, 7 мая Венера оказалась в наибольшей восточной элонгации и в каком-то пункте Земли стала незаходящим светилом, ее нижняя кульминация произошла в точке севера. Где в этот момент находилось Солнце?

4.26. Оцените максимально возможную продолжительность частной фазы прохождения Венеры по диску Солнца, наблюдаемого с Земли. Орбиты Венеры и Земли считать круговыми.

4.27. Каким должен быть эксцентриситет орбиты Марса, чтобы во время его великих противостояний планета не описывала петлю среди звезд на земном небе? Чему был бы равен блеск Марса во время таких противостояний? Каким по яркости светилом он был бы на земном небе? Большая полуось орбиты Марса равна 1.524 а.е., орбиту Земли считать круговой.

### ***Спутники планет Солнечной системы***

4.28. Сравните (количественно) влияние солнечных возмущений на движение Луны вокруг Земли и Ио вокруг Юпитера.

4.29. Известно, что Ио, Европа и Ганимед на каждом своем обороте вокруг Юпитера попадают в его тень и лишь Каллисто может пройти мимо тени Юпитера. Исходя из этого, оцените угол наклона плоскости орбит спутников к плоскости орбиты Юпитера вокруг Солнца (считая этот угол одинаковым для всех четырех спутников).

4.30. Оцените освещенность поверхности спутника Сатурна Титана, обращенной к Сатурну, в зависимости от конфигурации Солнца, Сатурна и Титана. Какие основные периоды суток на Титане вы можете выделить, какова их продолжительность?

### ***Малые тела Солнечной системы***

4.31. Двойная система состоит из двух одинаковых астероидов с радиусами 500 км и средней плотностью  $2 \text{ г/см}^3$ . Какое максимальное расстояние может разделять эти астероиды друг от друга? Будут ли эти астероиды различимы по отдельности в крупные земные телескопы? Орбиты астероидов в двойной системе считать круговыми, орбита системы вокруг Солнца также круговая, радиус 2.5 а.е.

4.32. Оцените ошибку определения координат астероида Церера вблизи его квадратуры, вызванную наличием фазового эффекта, связанного с тем, что Солнце освещает не весь диск Цереры. Диаметр Цереры равен 1000 км, а радиус орбиты – 2.77 а.е.

4.33. Как вы думаете – почему среди особо ярких комет редко встречаются короткопериодические, гораздо чаще яркими оказываются кометы, которые затем удаляются от Солнца на многие тысячи лет или вообще навсегда?

### ***Физика звезд***

4.34. Оцените массу водорода, который сгорит в недрах Солнца за все время его эволюции. Сравните ее с массой планет Солнечной системы. При расчетах принять, что один атом гелия  $^4\text{He}$  на 0.7% легче четырех протонов, а время жизни Солнца на главной последовательности равно 15 млрд лет.

4.35. Предположим, в один момент поверхность Солнца остыла с 6000 до 5000 К. Оцените, как изменится вид спектральных линий бальмеровской серии водорода.



4.36. По интегральной светимости звезда **A** в четыре раза превосходит звезду **B**, однако в дальней инфракрасной области спектра звезда **B** вдвое ярче звезды **A**. Найдите отношение радиусов и температур двух звезд. Излучение звезд считать чернотельным.

4.37. Если мы могли бы увеличивать температуру звезды до бесконечности, но чтобы при этом она оставалась абсолютно черным телом, как изменялся бы ее показатель цвета  $B-V$ ?

4.38. Две звезды – белый карлик и белый сверхгигант имеют одинаковый химический состав и одинаковую температуру поверхности. У какой из звезд степень ионизации вещества на поверхности будет выше?

4.39. Около далекой звезды главной последовательности открыта планета, обращающаяся вокруг нее по круговой орбите. Спектрометрические наблюдения показали, что ее орбитальная скорость равна 30 км/с, а период обращения составляет 10 лет. По интерферометрическим данным угловое расстояние планеты от звезды составляет  $0.064''$ . Видна ли эта звезда на нашем небе невооруженным глазом? Межзвездным поглощением пренебречь.

4.40. Известно, что "первая вспышка" протозвезды происходит в момент, когда гравитационная энергия становится равной энергии, необходимой для превращения всей массы протозвезды в плазму. Найдите абсолютную звездную величину протозвезды с массой Солнца в этот момент, если известно, что ее эффективная температура в два раза меньше эффективной температуры Солнца. Энергия, необходимая для превращения одного грамма вещества протозвезды в плазму, равна  $2.5 \cdot 10^9$  Дж/кг.

### *Двойные и переменные звезды*

4.41. Двойная система состоит из одинаковых компонент, обращающихся вокруг общего центра масс по круговым орбитам. Плоскость орбит располагается перпендикулярно лучу зрения, и классический эффект Доплера в спектре не наблюдается. Какой должна быть система (массы, радиусы звезд, расстояние между ними), чтобы мы смогли зарегистрировать поперечный эффект Доплера?

4.42. Наблюдая систему из двух белых карликов, мы один раз за 51.14 суток наблюдаем падение блеска в результате взаимных затмений звезд. Во время каждого затмения блеск звезды уменьшается в течение 320 секунд, затем 160 секунд держится на постоянном уровне, а потом за 320 секунд вновь возрастает до обычного значения. По спектральным данным установлено, что лучевая скорость более яркой компоненты изменяется с амплитудой 38.57 км/с. Считая температуру поверхности обеих звезд одинаковой, вырожденный газ обеих карликов – нерелятивистским, пренебрегая вращением звезд вокруг своих осей, найдите массы и радиусы звезд. Считать, что Земля находится в плоскости орбит звезд.

4.43. Определите максимальное расстояние до галактики, в которой можно наблюдать переменные звезды типа RR Лиры.

4.44. В Вашем распоряжении имеются данные измерений кривой блеска, кривой лучевой скорости переменной звезды – цефеиды, а также ее спектры в различные фазы периода. Сможете ли вы определить радиус цефеиды? Как это лучше сделать?

### *Звездные скопления и туманности*

4.45. Измерив собственные движения звезд рассеянного звездного скопления, астрономы обнаружили, что все они направлены к одной точке неба, отстоящей на  $20^\circ$  от самого скопления. Величина собственного движения составляла  $0.1''$  в год. Наблюдатели также измерили лучевую скорость звезд, равную 20 км/с, однако по рассеянности забыли указать ее знак, то есть не

сообщили, приближаются или удаляются от нас звезды скопления. Восстановите эту недостающую информацию, а также найдите расстояние до звездного скопления.

4.46. Представьте, что Солнце, двигаясь вокруг центра Галактики, встречается с шаровым звездным скоплением и пролетает прямо через его центр. Сможет ли Солнце сохранить свою планетную систему такой, какой она была до сближения со скоплением? Скопление имеет радиус 30 пк и состоит из миллиона звезд, равномерно распределенных внутри скопления.

4.47. В планетарных туманностях наблюдаются очень яркие "небулярные" линии азота и кислорода. Условием их возникновения является то, что за время нахождения в возбужденном состоянии атом не должен столкнуться ни с одним из электронов окружающей среды. Оцените среднюю концентрацию электронов в планетарной туманности, если известно, что по относительной интенсивности этих линий температура составляет 10000 К, а время жизни возбужденного атома около 50 секунд. Эффективное сечение взаимодействия атома с электроном равно  $10^{-20} \text{ м}^2$ .

### *Галактики, закон Хаббла*

4.48. Далекая спиральная галактика имеет на нашем небе размер, равный угловому диаметру Луны. В ее диске наблюдается цефеида с периодом 10 дней, имеющая средний блеск  $21.8^m$ . Измерения лучевых скоростей показали, что орбитальная скорость в диске  $v$  возрастает пропорционально квадратному корню из расстояния до центра  $r$ . Найдите массу галактики, считая ее толщину равной 1 кпк, а плотность в центре – 1 массе Солнца на кубический парсек.

4.49. С самого края большой спиральной галактики, удаленной от нас на 2 Мпк и видимой на Земле «с ребра» как тонкая нить размером  $1^\circ$ , был получен радиосигнал, похожий на позывные далекой цивилизации. С помощью телескопа с фокусным расстоянием 2 метра и дифракционной решетки с разрешением 5 А/мм со щелью, направленной вдоль оси галактики, был получен ее спектр. Линии в желто-зеленой части спектра (5500 А) оказались наклоненными под углом  $5^\circ$  к нормальному положению. В какую область галактики нужно послать ответный сигнал далекой цивилизации? Орбиты звезд вокруг центра галактики считать круговыми.

4.50. На небе обитаемой планеты, находящейся в далекой галактике, наша Галактика с большим трудом различима в школьный телескоп. Найдите красное смещение далекой галактики. Постоянная Хаббла равна  $65 \text{ км}/(\text{с} \cdot \text{Мпк})$ .

4.51. Скопление галактик состоит из 10000 одинаковых галактик с блеском  $18^m$  каждая. Все скопление на земном небе имеет угловой диаметр  $5^\circ$ . Спектральные измерения показали, что красное смещение скопления составляет 0.1, а разность лучевых скоростей отдельных галактик и лучевой скорости скопления достигает  $\pm 500 \text{ км}/\text{с}$ . Считая, что все галактики состоят из звезд, похожих на Солнце, определите вклад «темной материи» в массу скопления.

4.52. Определите галактический параллакс квазара с красным смещением  $z=1$ .

## Часть 5. Открытая Заочная Астрономическая Олимпиада (2005 год)

5.1. Искусственный спутник Земли обращается вокруг нашей планеты по круговой орбите, лежащей в плоскости эклиптики. При наблюдении из Краснодара этот спутник и точка весеннего равноденствия всегда восходят над горизонтом строго одновременно. В определенные моменты времени спутник оказывается на небе точно над точкой юга. На какой высоте над горизонтом он в это время находится? Чему равен радиус орбиты спутника? Рефракцией и суточным параллаксом спутника пренебречь.

5.2. Искусственный спутник Земли обращается вокруг нашей планеты по эллиптической орбите, лежащей в плоскости эклиптики. В перигее он находится на том же расстоянии от Земли, что и Луна. Оцените максимально возможный эксцентриситет орбиты спутника. Гравитационное влияние Луны не учитывать.

5.3. Далекая звезда находится на небе в точке летнего солнцестояния. Во время прохождения мимо звезды восходящего узла лунной орбиты на Земле в каждый оборот Луны будет наблюдаться покрытие данной звезды Луной. Сколько покрытий будет содержать серия? На какой широте и в какой части неба будет видно первое и последнее покрытие звезды Луной в серии? Орбиту Луны считать круговой.

5.4. Полоса видимости полного солнечного затмения прошла поочередно по городам: Осло (Норвегия), Варшава (Польша), Констанца (Румыния), Анкара (Турция), Багдад (Ирак), Керман (Иран) и Исламабад (Пакистан). В каком из четырех астрономических сезонов года произошло данное затмение?

5.5. Значения астрономического азимута восхода и последующего захода некоторой планеты в Санкт-Петербурге составили соответственно  $-90.0^\circ$  и  $+90.4^\circ$ . Заход диска планеты за горизонт длился 3.2 секунды. Что это за планета, и можно ли что-то сказать о времени года, когда это произошло?

5.6. Находясь в точке наибольшей восточной элонгации, Меркурий вступил в соединение с Венерой, более чем в 5 раз уступая ей по видимому диаметру. У какой из планет ближайшее нижнее соединение с Солнцем произойдет раньше? На сколько времени? Орбиты Меркурия, Венеры и Земли считать круговыми.

5.7. Два метеорных роя движутся вокруг Солнца в точности по одной и той же орбите, но в разных направлениях. В один момент времени оба роя встречаются друг с другом и с Землей. При этом на Земле наблюдаются два метеорных потока с радиантами, имеющими координаты  $\alpha = 6\text{ч}$ ,  $\delta = -66.6^\circ$  и  $\alpha = 18\text{ч}$ ,  $\delta = 0^\circ$ . Найти эксцентриситет орбиты метеорных роев. В какую дату наблюдались метеорные потоки? Орбиту Земли считать круговой.

5.8. С помощью Гигантского Оптического Космического телескопа со сверхвысоким угловым разрешением астрономы будущего смогли рассмотреть диск звезды Бетельгейзе ( $\alpha$  Ориона). У какого объекта поверхностная яркость (яркость единицы угловой площади) больше – у Бетельгейзе или у Венеры? Во сколько раз?

5.9. Шаровое звездное скопление имеет на нашем небе блеск  $4.5^m$  и видимый диаметр  $25'$ . Расстояние до скопления составляет 3 кпк. Считая, что скопление состоит из звезд, похожих на Солнце, равномерно распределенных по объему внутри шара, оцените освещенность на ночной стороне обитаемой планеты, обращающейся вокруг одной из центральных звезд скопления. Сравните ее с освещенностью в лунную ночь на Земле. Поглощением света в межзвездной среде и в атмосфере планеты пренебречь.

5.10. Галактика имеет радиус 15 кпк и значительно меньшую толщину диска. Масса галактики равна  $10^{11}$  масс Солнца и равномерно распределена по объему галактики. Две звезды обращаются вокруг центра галактики в одном направлении по круговым орбитам с радиусами 5 и 10 кпк. Найти синодический период первой звезды при наблюдении из окрестностей второй звезды.

## Часть 6. Астрономический тест

В каждом из вопросов нужно расположить четыре объекта А, В, С и D в порядке возрастания параметра, указанного в условии.

6.1. Слои в атмосфере Земли – высота:

А – ионосфера, В – тропосфера, С – слой серебристых облаков, D – озоновый слой.

6.2. Месяцы – продолжительность гражданских сумерек на широте Москвы:

А – июнь, В – август, С – октябрь, D – декабрь.

6.3. Звезды – время от восхода до захода на широте  $+45^\circ$ :

А – Вега, В – Капелла, С – Ригель, D – Сириус.

6.4. Звезды – время от восхода до захода на широте  $0^\circ$ :

А – Альдебаран, В – Альтаир, С – Канопус, D – Фомальгаут.

6.5. Звезды – размер области видимости на Земле:

А – Арктур, В – Акрукс, С – Поллукс, D – Процион.

6.6. Созвездия – сезон наилучшей видимости в хронологии от начала до конца года:

А – Геркулес, В – Гидра, С – Малый Пес, D – Кит.

6.7. Метеорные потоки – период активности в хронологии от начала до конца года:

А – Геминиды, В – Квадрантиды, С – Ориониды, D – Персеиды.

6.8. Периоды обращения Луны – продолжительность:

А – синодический, В – сидерический, С – аномалистический, D – драконический.

6.9. Либрации Луны – максимальная величина:

А – по широте, В – по долготе, С – физическая, D – параллактическая.

6.10. Явление – максимальная продолжительность:

А – солнечное затмение, В – теневое лунное затмение, С – покрытие Луной конкретной звезды на эклиптике, D – прохождение Меркурия по диску Солнца.

6.11. Явление – частота наступления на Земле:

А – солнечное затмение, В – теневое лунное затмение, С – покрытие Луной конкретной звезды на эклиптике, D – прохождение Меркурия по диску Солнца.

6.12. Планеты – яркость:

А – Венера (наибольшая элонгация), В – Марс (великое противостояние), С – Марс (среднее противостояние), D – Юпитер (среднее противостояние).

6.13. Планеты – синодический период:

А – Меркурий, В – Венера, С – Марс, D – Юпитер.

6.14. Планеты – максимальная высота над горизонтом в ночное время на широте Москвы:  
А – Меркурий, В – Венера, С – Марс, D – Юпитер.

6.15. Планеты – средняя плотность:  
А – Земля, В – Марс, С – Юпитер, D – Сатурн.

6.16. Спутники планет – размеры:  
А – Луна, В – Ганимед, С – Каллисто, D – Титан.

6.17. Тела Солнечной системы – период обращения вокруг Солнца:  
А – комета Галлея, В – комета Хейла-Боппа, С – комета Энке, D – Нептун.

6.18. Звезды – кратность:  
А –  $\alpha$  Близнецов, В –  $\alpha$  Центавра, С –  $\theta$  Ориона, D – Солнце.

6.19. Звезды – масса:  
А – Солнце, В – Альциона, С – белый карлик (максимум), D – красный карлик.

6.20. Звезды – возраст:  
А – Солнце, В – Альциона, С – Спика, D – звезда в скоплении M13.

6.21. Звезды – эффективная температура:  
А – Альдебаран, В – Вега, С – Капелла, D – Ригель.

6.22. Галактики – масса:  
А – Галактика Млечный Путь, В – туманность Андромеды, С – туманность Треугольника, D – Большое Магелланово Облако.

6.23. Галактики – относительное содержание газа:  
А – линзовидные, В – неправильные, С – спиральные, D – эллиптические.

6.24. Объекты Вселенной – светимость:  
А – Галактика Млечный Путь, В – квазар, С – шаровое скопление, D – сверхновая звезда.

6.25. Методы определения расстояний во Вселенной – максимальное измеряемое расстояние:  
А – цефеиды, В – параллакс, С – красное смещение, D – сверхновые I типа.

## Часть 7. Задачи первых Московских Астрономических Олимпиад

### *1 Олимпиада (1947 год), I тур*

7.1. Чем объясняются белые ночи?

7.2. Орбиты двух комет лежат в плоскости эклиптики. Кометы имеют перигелийные расстояния 0.5 а.е. и 2.5 а.е. Длины их хвостов превышают 100 млн км. Может ли Земля пройти через хвосты этих комет?

7.3. В какое время и на какой высоте кульминирует Марс, находясь в противостоянии 22 декабря в Москве? В каком созвездии он при этом находится?

### *1 Олимпиада (1947 г.), II тур*

7.4. Путешественник заметил, что во время затмения ущербление диска Солнца началось прямо снизу. Где и когда это могло быть?

7.5. Какой вид имеет спектр быстро вращающейся планеты, если щель спектрографа направлена вдоль ее экватора?

7.6. Во сколько раз изменится радиус цефеиды, если амплитуда изменения ее блеска равна  $1.5^m$ , а яркость единицы поверхности остается постоянной?

### *2 Олимпиада (1948 год), I тур*

7.7. В какое время и на какой высоте кульминирует Юпитер в момент его противостояния в Москве 22 июня? В каком созвездии он виден?

7.8. В романе Жюль Верна «Гектор Сервадак» описывается «комета Галлия» с расстоянием от Солнца в афелии 820 млн км и периодом обращения 2 года. Могла ли быть такая комета?

7.9. Найти отношение радиусов в затменно-переменной системе типа Алголя, если затмение центральное, спутник темный, а отношение блеска в максимуме и минимуме равно  $n$ .

### *2 Олимпиада (1948 год), II тур*

7.10. Наблюдатель видел, как во время солнечного затмения ущербление началось сверху. Где и когда это могло быть?

7.11. Установить соотношение между расстояниями  $a$  планет от Солнца и линейными скоростями  $v$  в их орбитальном движении, считая орбиты планет круговыми.

7.12. Расстояние до Сириуса (2.7 парсека) уменьшается на 8 км каждую секунду. Через сколько лет блеск Сириуса возрастет вдвое?

### *3 Олимпиада (1949 год), I тур*

7.13. Описать созвездия Ориона и Стрельца с наиболее примечательными объектами.

7.14. Как (в принципе) А.А. Белопольский при помощи спектроскопа смог установить метеоритное строение кольца Сатурна?

7.15. Какие видимые пути на небесной сфере должны описывать при параллактическом смещении звезды:  $\alpha$  Льва,  $\delta$  Ориона,  $\gamma$  Дракона и Полярная?

7.16. Если в каком-либо году затмение Солнца было 2 января, когда (приблизительно) в этом году могут быть затмения Солнца и Луны?

7.17. Разъяснить смысл народного суждения: «Месяц зимой ходит, как Солнце летом».

### ***3 Олимпиада (1949 год), II тур***

7.18. Верно ли, что 21 марта и 23 сентября день на Земле всюду равен ночи?

7.19. Определить диаметр звезды  $\alpha$  Кита в километрах при ее видимом угловом диаметре  $0.065''$  и параллаксе  $0.024''$ .

7.20. Синодический период внешней планеты составляет 417 суток. Каково ее среднее расстояние от Солнца?

### ***4 Олимпиада (1950 год), I тур***

7.21. 22 декабря во время полного затмения Луны произошло покрытие Юпитера Луной. В каком созвездии это происходило и в каком положении относительно Солнца и Земли был Юпитер?

7.22. Где полярный день длиннее – на северном или южном полюсе?

7.23. Найти ширину (в километрах) метеорного потока, метеоры которого наблюдались с 16 июля по 24 августа. Предполагается, что движение Земли перпендикулярно к оси потока.

7.24. Нарисовать расположение главных звезд и указать важнейшие объекты одного из следующих созвездий: Лира, Телец, Персей.

7.25. Какое созвездие дважды встречается на карте звездного неба? Видно ли оно вечером в марте?

### ***4 Олимпиада (1950 год), II тур***

7.26. Сколько времени прошло от соединения до противостояния планеты, если ее блеск за это время изменился на одну звездную величину?

7.27. Есть ли на Луне места, где Земля восходит и заходит?

7.28. В максимуме затменная переменная звезда имеет блеск  $6^m$ , в минимуме –  $8^m$ . Считая затмение центральным и спутник – темным, найти отношение объемов компонентов этой пары.

7.29. 1) Указать ориентировочно местонахождение созвездий Щита, Лисички, Стрелы, Малого Коня, Зайца, Ворона, Рыси.

2) Какие из созвездий земного неба носят названия физических приборов?

3) Указать цвет и температуру звезд: Альдебарана, Бетельгейзе, Веги, Денеба, Прокциона, Аркутра, Капеллы и перечислить их в порядке убывания блеска.

7.30. В каком незодиакальном созвездии и когда бывает Солнце?

### **5 Олимпиада (1951 год), I тур**

- 7.31. Какие Вы знаете способы ориентировки по звездам, кроме Полярной?
- 7.32. Какие Вы знаете созвездия, не заходящие за горизонт на широте Москвы? Как они видны сегодня вечером (I тур Олимпиады проводился в апреле)?
- 7.33. Параллакс Солнца  $8.80''$ , а параллакс звезды  $0.44''$ . В сколько раз эта звезда дальше Солнца?
- 7.34. Какие Вы знаете работы М.В. Ломоносова в области астрономии?
- 7.35. Почему в средних широтах серп «молодой» Луны весной находится высоко над горизонтом и его рога направлены вверх, а осенью так бывает со «старой» Луной?

### **5 Олимпиада (1951 год), II тур**

- 7.36. Какой наибольшей высоты, в какой день года, в котором часу и в каком созвездии может достигать полная Луна на широте Москвы?
- 7.37. Каковы угловой диаметр и звездная величина Солнца с Плутона и во сколько раз освещение этой планеты Солнцем отличается от освещения Земли полной Луной?
- 7.38. Описать движение спутника Юпитера Амальтеи – суточное и относительно звезд – для наблюдателя на экваторе планеты, считая, что движение спутника происходит в плоскости экватора и орбиты планеты, совпадающих с плоскостью эклиптики.

### **6 Олимпиада (1952 год), I тур**

- 7.39. Что Вы знаете о созвездиях Андромеды, Пегаса и Кассиопеи?
- 7.40. 21 марта в истинный полдень длина тени вертикально стоящего столба равнялась высоте столба. На какой широте это было?
- 7.41. Указать (кратко) работы академика В.Я. Струве, характеризующие его как крупнейшего астронома XIX столетия.

### **6 Олимпиада (1952 год), II тур**

- 7.42. По спектру некоторой звезды, находящейся вблизи точки летнего солнцестояния, в 20-х числах марта была определена ее лучевая скорость, равная  $-70$  км/с. Через полгода измерения лучевой скорости дали результат  $-130$  км/с. Определить на этом основании, как это было впервые предложено академиком А.А. Белопольским, расстояние от Земли до Солнца.
- 7.43. Полное солнечное затмение происходит во второй половине июня около местного полудня. Нарисовать наблюдаемую картину видимых при этом планет и наиболее ярких звезд, учитывая, что Венера находится в наибольшей западной элонгации, Меркурий в нижнем соединении, Марс в противостоянии.
- 7.44. 20 марта в 18 часов по московскому декретному времени происходит покрытие Луной звезд Плеяд. Рассказать, как наблюдалось бы это явление в Москве, Свердловске, в Комсомольске-на-Амуре.



## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### Часть 1. 57 Московская Астрономическая Олимпиада (2003 год)

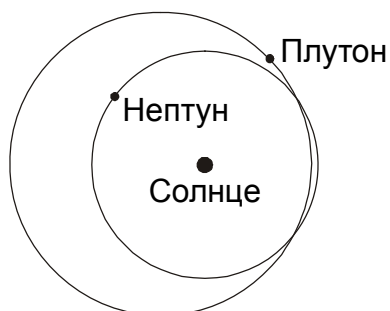
#### I ТУР

##### 7 класс и моложе

1.1. Пинкертон, в принципе, прав. На всем звездном небе около 6 тысяч звезд, видимых невооруженным глазом. Из них половина в каждый момент времени находится над горизонтом. Однако слабые звезды не будут видны низко над горизонтом, особенно если прозрачность атмосферы не очень хорошая. В итоге, на звездном небе можно увидеть 1-2 тысячи звезд.

1.2. Равенство масс и размеров Луны и Титана означает примерное равенство второй космической скорости, необходимой для преодоления силы тяжести тела и выхода в космическое пространство. Будут ли иметь молекулы газов у поверхности Луны или Титана такую скорость – зависит от температурных условий. Луна, находящаяся намного ближе к Солнцу, разогрета сильнее, и молекулы покидают ее, не образуя атмосферы. На холодном Титане газовая оболочка устойчива и достаточно плотна.

1.3. На иллюстрации орбиты Нептуна и Плутона показаны в проекции на плоскость. В пространстве орбиты обеих планет находятся в разных плоскостях и не пересекаются. Даже если Нептун и Плутон окажутся в одной точке на рисунке – фактически одна планета будет находиться над другой.



1.4. Благоприятные условия для запуска космического аппарата наступают в определенной конфигурации Венеры, то есть при фиксированном взаимном расположении Солнца, Венеры и Земли. Подобные конфигурации повторяются по прошествии синодического периода планеты, составляющего для Венеры 584 дня.

##### 8-9 классы

1.5. Обозначим периоды обращения Земли и планет А и В вокруг Солнца через  $T$ ,  $T_A$  и  $T_B$ . Записывая выражения для синодического периода обеих планет, получаем равенство:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_B}.$$

Складывая вторую и третью части равенства, получаем:

$$\frac{2}{S} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B},$$

из чего вытекает, что синодический период планеты А при наблюдении с планеты В составляет  $S/2$ .

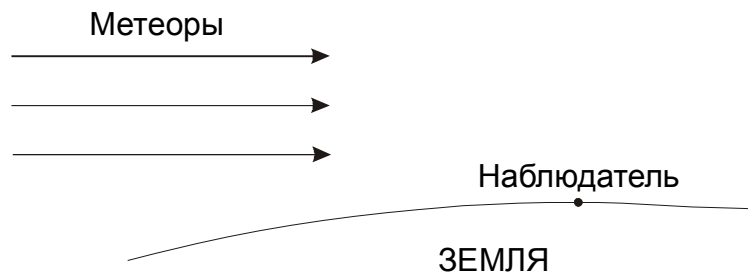
1.6. По координатам радианта метеорного потока видно, что он находится вблизи северного полюса эклиптики. Следовательно, скорость метеоров относительно Земли была направлена перпендикулярно направлению движения Земли. Двигаясь со скоростью около 30 км/с, Земля пересекла поток за 12 часов, из чего получаем ширину потока около 1.3 млн. км. На самом деле, ширина потока несколько меньше, так как в пространстве метеоры летят не перпендикулярно эклиптике, а под некоторым углом, догоняя в своем движении Землю.

1.7. В момент восхода звезды А в противоположной области неба заходит точка со склонением  $+8^\circ$ , которая взойдет одновременно с заходом звезды А. Звезда В заходит одновременно с данной точкой, но имея большее склонение, в северном полушарии проведет под горизонтом меньше времени, и взойдет раньше, то есть до захода звезды А.

1.8. Время океанских приливов определяется положением Луны на небе. Двигаясь по орбите в сторону, противоположную видимому вращению звездного неба, Луна каждый день кульминирует примерно на 50 минут позже, чем в предыдущий день, завершая полный цикл за 29.5 дней – за синодический период Луны. На 50 минут смещается и время приливов.

### 10-11 классы

1.9. Такое вполне может быть. Если метеор летит горизонтально относительно наблюдателя (как показано на рисунке), приближаясь к нему, то он увидит его полет снизу вверх. Для «падающих звезд», относящихся к метеорным потокам, такая ситуация наступит, если радиант потока будет находиться вблизи горизонта.



1.10. Величина приливного ускорения равна разности ускорения силы тяжести, вызываемой, к примеру, Луной, в точке Земли, ближайшей к Луне, и в центре Земли. Обозначая массу Луны через  $m$ , радиус Земли – через  $R$ , а расстояние от Земли до Луны – через  $d$ , запишем выражение для приливного ускорения:

$$a_T = \frac{Gm}{(d-R)^2} - \frac{Gm}{d^2}.$$

Так как радиус Земли значительно меньше расстояния до Луны, это выражение можно переписать как:

$$a_T = \frac{2GmR}{d^3}.$$

Получается, что величина приливного ускорения пропорциональна массе тела, вызывающего приливы, и радиусу тела, на котором эти приливы наблюдаются. Перемещаясь с Земли на Луну, мы в данной формуле должны будем подставить в 81.3 раза большее значение массы, но в 3.67

меньшее значение радиуса. Величина  $d$  не изменится. В результате, приливное ускорение от Земли на Луне примерно в 22 раза сильнее приливного действия Луны на Землю.

1.11. Во время наибольшей элонгации Венеры эта планета и Солнце находятся на эклиптике в  $47^\circ$  друг от друга. Вспомним, что через две разные точки на сфере, не являющиеся противоположными, можно провести ровно один большой круг сферы. В случае Солнца и Венеры этот большой круг и будет эклиптикой (во время наибольшей элонгации Венера отходит от эклиптики на малый угол, несущественный для данной задачи). Если Солнце и Венера находятся на равных высотах на юге и севере, то проведенный через них большой круг пройдет также через зенит и точки юга и севера, то есть эклиптика совпадет с небесным меридианом и тем самым пройдет через Северный и Южный полюса мира, чего быть не может.

Если Солнце находится на западе, а Венера – на той же высоте на востоке, то проведенный через них большой круг пройдет через зенит и точки запада и востока. Эклиптика может так располагаться на небе на северном тропике в 6ч по звездному времени и на южном тропике в 18ч по звездному времени. Зенит находится посередине между Солнцем и Венерой, в  $23.5^\circ$  градусах от обеих светил. Следовательно, их высота составляла  $66.5^\circ$ . Можно также добавить, что это была наибольшая восточная элонгация Венеры, и дело происходило около 30 мая, если наблюдения происходили на северном тропике (Солнце не дошло  $23.5^\circ$  до точки летнего солнцестояния) или около 30 ноября, если наблюдения велись на южном тропике.

1.12. Расстояния до обеих звезд можно считать одинаковыми, значит одинаковы и светимости звезд. При этом одна из них вдвое горячее, то есть, излучает в 16 раз больше энергии с единицы площади. Следовательно, более горячая звезда в 4 раза меньше по размерам. Вне минимумов мы видим обе звезды 6-й величины, и их суммарный блеск будет равен

$$m_0 = 6 - 2.5 \lg 2 = 5.25.$$

Так как Земля находится в плоскости орбит, то в определенный момент более холодная звезда, имеющая большие размеры, может полностью закрыть более горячую звезду. Видимый блеск переменной на нашем небе составит  $m_1 = 6$ , и это будет главный минимум. Во время вторичного минимума горячая звезда пройдет перед холодной, но закроет лишь  $1/16$  ее диска. В это время мы будем регистрировать все излучение одной звезды  $6^m$  и  $15/16$  излучения второй звезды того же блеска. Звездная величина переменной составит

$$m_2 = 6 - 2.5 \lg (31/16) = 5.28.$$

## II ТУР

### *7 класс и моложе*

1.13. Расстояние от Солнца до Земли составляет около 149.6 млн км, а свет распространяется со скоростью 300000 км/с, проходя данное расстояние за 8 минут 19 секунд. Поэтому все события на Солнце происходят на 8 с лишним минут раньше, чем мы их регистрируем. Поэтому из трех событий первым произошло событие В (чуть ранее 12ч02м), затем событие А (12ч02м) и, наконец, событие С (незадолго до 12ч04м).

1.14. Сириус – одна из самых близких к Солнцу звезд, он находится на расстоянии около 2.6 пк. Если мы перенесемся с Земли в окрестности Сириуса, взаимное положение большинства звезд изменится несильно, и лишь самые близкие звезды окажутся в совершенно иных созвездиях. Солнце будет находиться в точке неба, противоположной положению Сириуса на нашем небе, то есть в восточной части созвездия Геркулеса, вблизи границы с созвездиями Орла, Стрелы и Лисички. Блеск Солнца составит около  $1.8^m$ , и оно будет светить немного слабее находящихся рядом звезд несколько деформировавшегося «летнего треугольника».

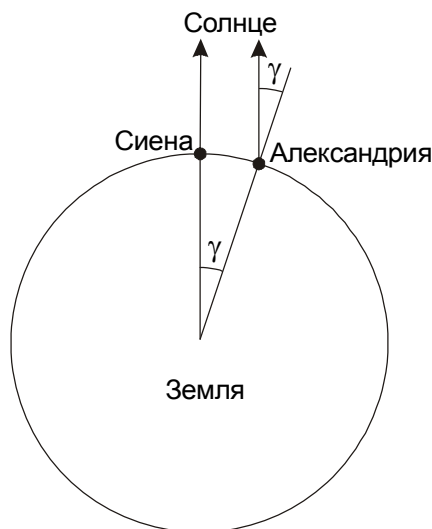
1.15. Точка, находящаяся на экваторе, как и вся поверхность Земли, завершает полный оборот вокруг оси вращения нашей планеты за 24 часа относительно Солнца и за 23ч56м – относительно звезд. Для оценки ошибки измерений данная разница несущественна. Если 24 часа соответствуют 40000 км, то 1 минута будет соответствовать 27.8 км. Именно таким будет расстояние между двумя точками экватора, на которых солнечный полдень наступит с интервалом в 1 минуту, и именно такой будет ошибка измерения долготы.

1.16. Покрытие Марса Луной обычно длится около одного часа (максимум – чуть менее двух часов). Если заход Луны и Марса происходит через час-два после полуночи, значит, Марс недавно прошел точку противостояния с Солнцем и виден всю первую половину ночи и в самом начале ее второй половины. Промежуток времени между двумя последующими противостояниями превышает два года, поэтому в начавшемся году противостояния Марса не будет.

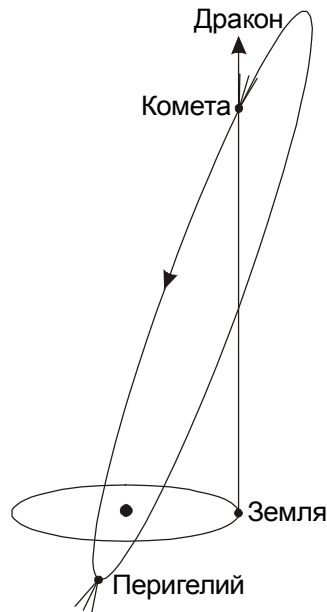
1.17. Во время противостояния Юпитер находится вблизи противоположной Солнцу точки эклиптики. Солнце в феврале с каждым днем поднимается на широте Москвы все выше, и если бы Юпитер двигался вдоль эклиптики в ту же сторону, что и Солнце, его максимальная высота с каждым днем бы, наоборот, уменьшалась. Но в противостоянии Юпитер движется попятно, следовательно, каждую последующую ночь на широте Москвы он поднимается на все большую высоту над горизонтом.

### 8-9 классы

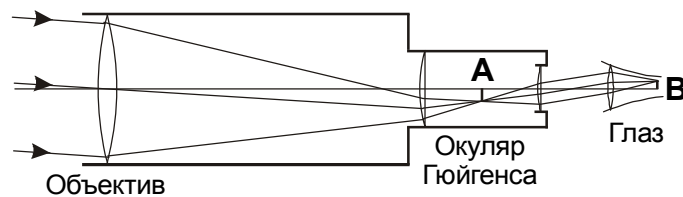
1.18. Из рисунка видно, что расстояние между Сиеной и Александрией по поверхности Земли равно  $R \cdot \gamma$ , где  $R$  – радиус Земли, а  $\gamma$  – зенитное расстояние Солнца в Александрии, когда оно находится в зените в Сиене, выраженное в радианах (расстояние до Солнца намного больше размеров Земли, и направления на Солнце из двух городов можно считать параллельными). Подставляя численные значения, получаем, что 5000 стадий, разделявшие два города, равны 800 км, следовательно, одна стадия была равна 160 метрам.



1.19. В созвездии Дракона находится северный полюс эклиптики. Находясь еще далеко от Солнца и Земли, комета располагалась в пространстве значительно севернее плоскости эклиптики (см. рисунок). Но Солнце находится в фокусе эллипса – орбиты кометы, следовательно, в период прохождения перигелия комета опустится южнее плоскости эклиптики и будет лучше видна в южном полушарии Земли вне зависимости от положения самой Земли на орбите.



1.20. Схема построения изображения объекта показана на рисунке. Окуляр Гюйгенса состоит из двух положительных линз, первая из которых находится перед фокальной плоскостью объектива и служит для уменьшения геометрического размера поля зрения и, как следствие, уменьшения искажений на его краю. В фокусе, находящемся между линзами окуляра, строится перевернутое изображение небесного объекта **A**. Из окуляра лучи света попадают в глаз наблюдателя, который собирает их на сетчатке, строя второе изображение объекта **B**. Оно будет перевернутым по отношению к изображению **A**, то есть во всей оптической схеме изображение перевернется дважды и станет прямым.



Однако мы будем видеть это изображение все же как перевернутое. Третий раз изображение перевернет уже не оптическая схема в пространстве, а наш мозг при его обработке. Если бы он этого не делал, то в нашей повседневной жизни мы бы видели все предметы вокруг перевернутыми.

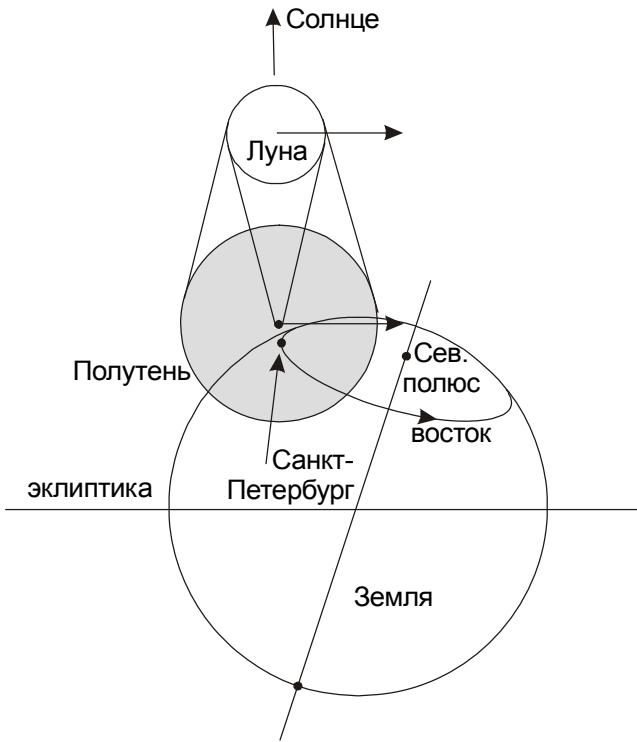
1.21. Восход Венеры на юге в северном полушарии может произойти только в том случае, если ее склонение в этот момент составляет

$$\delta = \varphi - 90^\circ,$$

и при этом увеличивается за счет движения Венеры среди звезд ( $\varphi$  – широта места). До этого восхода Венера была невозходящей на данной широте. Находясь в точке наибольшей элонгации, Венера движется вблизи эклиптики прямым движением с угловой скоростью, равной угловой скорости Солнца. При этом само Солнце находится в точке зимнего солнцестояния, и склонение Венеры будет увеличиваться, если ее элонгация восточная, и она обгоняет Солнце в движении вдоль эклиптики (Венера будет находиться в созвездии Козерога). Склонение Венеры в это время составит около  $-17^\circ$ , следовательно, дело происходило на широте  $73^\circ$  с.ш. Солнце 22 декабря на этой широте не восходит над горизонтом, а во время восхода Венеры на юге оно находилось в  $47^\circ$  к западу, то есть не очень глубоко под юго-западным горизонтом.

1.22. На рисунке показано расположение Земли, Луны и ее полутени в тот момент, когда в Петербурге наблюдается наибольшая фаза солнечного затмения. Солнце и Луна находятся

спереди относительно плоскости рисунка. Так как в указанный в условии момент диск Луны будет находиться чуть севернее диска Солнца («рога» Солнца направлены вверх), то линия центрального затмения пройдет севернее Санкт-Петербурга. Луна и полутень движутся под малым (около  $5^\circ$ ) углом к плоскости эклиптики, то есть почти параллельно ей. Затмение происходит астрономической весной, поэтому северный полюс Земли располагается в задней полусфере планеты по отношению к ее движению по орбите. На рисунке видно, что при смещении на восток от Санкт-Петербурга наибольшая фаза затмения будет уменьшаться, так как при этом мы удаляемся от линии движения центра лунной полутени.

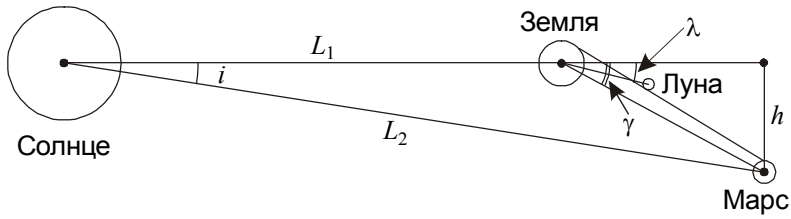


**10-11 классы**

1.23. Великими называются те противостояния Марса, при которых эта планета находится вблизи точки перигелия своей орбиты и подходит к Земле ближе, чем на 0.4 а.е. Такое явление может произойти в июле, августе или сентябре. Соответствующий участок орбиты Марса пролегает южнее плоскости эклиптики, и угол  $i$  (см. рисунок) составляет не менее  $1.6^\circ$  (максимальное значение,  $1.85^\circ$ , равно наклонению орбиты Марса). Обозначая расстояния Земли и Марса от Солнца через  $L_1$  и  $L_2$  и учитывая малость всех рассматриваемых углов, получаем, что на земном небе Марс будет располагаться южнее эклиптики на угол  $\gamma$ , равный

$$\gamma = \frac{h}{L_2 - L_1} = \frac{L_2 i}{L_2 - L_1}$$

и составляющий не менее  $5.6^\circ$ .



Наклон орбиты Луны к плоскости эклиптики  $\lambda$  составляет около  $5.1^\circ$ , поэтому геоцентрическое положение Луны на небе будет как минимум на  $0.5^\circ$  севернее положения Марса. Если в день противостояния будет наблюдаться покрытие Марса Луной, то, как видно на рисунке, оно может быть видно только в северном полушарии Земли, где положение Луны на небе за счет параллакса будет южнее ее геоцентрического положения.

9 сентября 2003 года, менее чем через две недели после великого противостояния Марса, будет наблюдаться его покрытие Луной, видимое только в некоторых областях Восточной Сибири – область видимости явления едва заденет Землю с северной стороны.

1.24. Любимая кошечка, как и любое живое существо, состоит в основном из углерода, водорода и кислорода, в меньших количествах в ней присутствуют азот, натрий, сера, хлор и другие элементы первых периодов таблицы Менделеева, элементов тяжелее железа в ней очень мало. Алмаз, из которого сделаны подвески – это тоже углерод. Водород – первый химический элемент, существовавший во Вселенной еще до образования звезд и галактик. Все элементы тяжелее водорода и гелия вплоть до железа образовались во Вселенной в ядрах звезд в течение их эволюции. Атомные ядра получались слиянием более легких ядер, и этот процесс обеспечивал звездам их энерговыделение. Чем тяжелее элемент, тем более массивной должна была быть звезда, в которой он образовался.

Однако элементы тяжелее железа, в частности золото, из которого состоит статуэтка, не могли образоваться таким образом, так как для этого, напротив, нужно затратить энергию. Тяжелые элементы появляются только во время взрывов сверхновых звезд, и каждый атом золота в статуэтке когда-то был свидетелем этой колоссальной космической катастрофы!

1.25. Определим абсолютную звездную величину Капеллы:

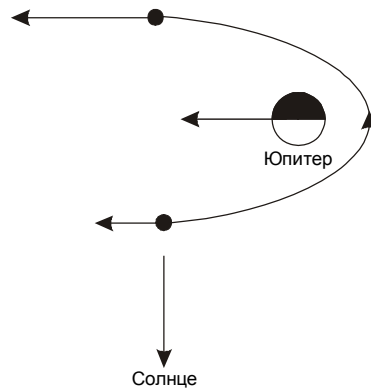
$$M = m + 5 - 5 \lg r = -0.5.$$

Получается, что светимость Капеллы примерно в 120 раз превосходит светимость Солнца. Учитывая схожесть спектральных характеристик, на расстоянии  $\sqrt{120}=10.9$  а.е. от Капеллы температурные и световые характеристики будут весьма близкими к земным. Кроме этого, схожесть условий должна включать в себя равенство с Землей такой важной характеристики, как ускорение свободного падения на поверхности планеты. Эта величина равна

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{4}{3}\pi GR\rho,$$

где  $M$ ,  $R$  и  $\rho$  – масса, радиус и средняя плотность планеты. Однако средняя плотность Земли составляет  $5.52 \text{ г/см}^3$ , значит, радиус планеты должен в 5.52 раз превышать радиус Земли. При этом масса планеты превысит массу Земли в  $5.52^2$  раз и составит  $1.8 \cdot 10^{26}$  кг.

1.26. Аппарат выполняет пассивный гравитационный маневр вблизи Юпитера: не включая двигателей, он увеличивает свою кинетическую энергию за счет энергии движения Юпитера. Для этого он получает приращение скорости, сонаправленное со скоростью планеты, затормаживая ее движение. Такое может произойти, если до сближения Юпитер догонял космический аппарат, а после уже аппарат улетал вперед от Юпитера. Схема движения аппарата относительно Юпитера в этом случае показана на рисунке.



Радиус орбиты Земли значительно меньше радиуса орбиты Юпитера, поэтому при наблюдении с Земли, как и при наблюдении с Солнца, аппарат находился с восточной стороны от Юпитера как до, так и после сближения, и лишь во время маневра ненадолго оказался к западу от планеты.

1.27. Данная звезда является спектрально-двойной. Слабая компонента линии натрия принадлежит звезде-спутнику. Исчезновения слабой линии указывают на то, что спутник периодически заходит за диск главной звезды, следовательно, мы находимся вблизи плоскости его орбиты. Предположим, что мы находимся точно в этой плоскости – оценочный характер задачи дает нам такое право. В этом случае синусоидальное изменение длины волны линии спутника указывает, что его орбита близка к круговой, а орбитальная скорость связана с амплитудой изменения длины волны линии спутника  $\Delta\lambda$  соотношением:

$$v = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda}.$$

Получается, что скорость орбитального вращения спутника (30.5 км/с) близка к скорости орбитального вращения Земли. Умножив эту величину на продолжительность прохождения спутника за главной звездой, мы получаем диаметр главной звезды – 600 миллионов километров или 4 а.е., что в 500 раз больше диаметра Солнца. С Земли эта исполинская звезда видна как диск с диаметром 0.004", из чего мы получаем расстояние до звезды – 1 кпк. Зная ее видимую звездную величину, мы получаем ее абсолютную звездную величину:

$$m_0 = m + 5 - 5 \lg r = -5.3.$$

Светимость звезды в 10000 раз больше светимости Солнца, а радиус превышает солнечный в 500 раз. Поток энергии с единицы площади данной звезды в 25 раз меньше, чем у Солнца, следовательно, по закону Стефана-Больцмана, температура поверхности звезды меньше солнечной в  $25^{1/4}$  раз и составляет примерно 2700 К.

Для нахождения массы звезды сравним двойную систему с системой Солнце-Земля и будем считать массу спутника много меньшей массы звезды. Запишем обобщенный III закон Кеплера в относительных величинах:

$$\frac{a^3}{T^2 M} = \frac{v^3 T}{M} = const.$$

Здесь  $M$  – масса центрального тела,  $a$  – радиус круговой орбиты,  $T$  – период обращения и  $v$  – орбитальная скорость спутника. Учитывая, что последняя из этих величин у Земли и звезды-спутника практически одинаковы, а период обращения звезды-спутника составляет 30 лет, получаем, что масса звезды равна 30 массам Солнца. Данная звезда представляет собой огромный и холодный красный сверхгигант.



## Часть 2. 58 Московская Астрономическая Олимпиада (2004 год)

### I ТУР

#### 7 класс и моложе

2.1. Прохождения Венеры по диску Солнца происходят вблизи нижнего соединения Венеры. В это время она движется на небе относительно звезд попятно, с востока на запад, навстречу Солнцу. Поэтому прохождение Венеры по диску Солнца начинается у восточного края солнечного диска, то есть слева, если вести наблюдения из северного полушария Земли. Во время прохождения угловой диаметр Венеры составляет около  $1'$ , и зоркие люди смогут увидеть ее на солнечном диске при использовании темного светофильтра.

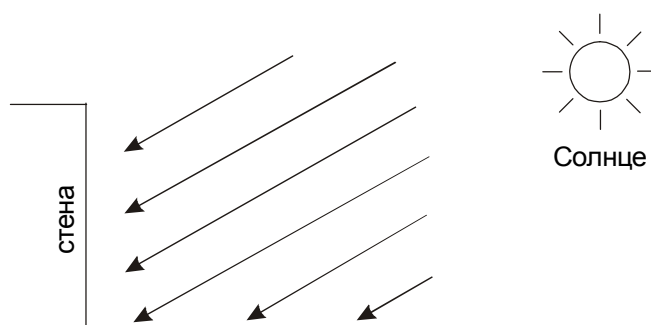
2.2. Для любых широт Земли (кроме полюсов, где звезды не восходят и не заходят) две разные звезды, одновременно восходящие в разных (даже близких) точках горизонта, имеют разное склонение. На любых широтах, кроме экватора, это будет означать разный промежуток времени от восхода до захода. И лишь на экваторе все звезды заходят ровно через 12 часов после восхода (если не учитывать рефракцию). Поэтому наблюдатель находится на экваторе.

2.3. «Ярким звездообразным светилом» может быть какая-либо из планет, превосходящая в блеске звезды. Однако, раз светило находилось над восточным горизонтом, планета может быть только внешней. Из внешних планет ярче всех звезд ночного неба может быть только Марс (вблизи противостояния) или Юпитер.

2.4. Школьник обманывал своего друга. Диск Луны во время полного солнечного затмения находится на диске Солнца, вызывая само затмение, и не может быть виден в стороне в виде серпа.

#### 8-9 классы

2.5. В Петербурге в марте Солнце в полдень поднимается на высоту около  $30^\circ$  над горизонтом. Стена Петропавловской крепости у берега Невы обращена практически точно на юг, и днем солнечные лучи падают на нее под углом  $60^\circ$ , хорошо нагревая стену и соприкасающийся с ней воздух. Поэтому стоять у стены достаточно тепло. А вот сидеть было холодно, так как горизонтальные поверхности освещались Солнцем значительно слабее, а у земли вообще лежал снег.



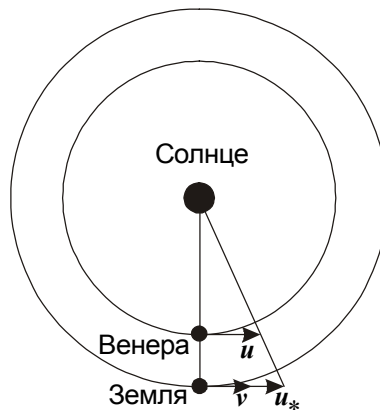
2.6. Как известно, чем горячее звезда, тем в более коротковолновую область спектра попадает максимум ее излучения. В нашем случае в спектре звезды **В** преобладает длинноволновое (красное) излучение, и если на пути от Земли к этим звездам нет большого количества межзвездной пыли, поглощающей свет звезд и меняющей его цвет, то звезда **А** горячее звезды **В**.

2.7. Если пренебречь параллаксом Луны и атмосферной рефракцией, то ее восход и заход на экваторе происходят при часовом угле  $\pm 64$  независимо от склонения. За 29.53 солнечных суток (синодический период Луны) завершается один оборот Луны по небу относительно Солнца, и тем самым проходит только 28.53 «лунных суток». Тем самым, продолжительность лунных суток составляет 24ч50м, а между восходом и заходом проходит половина этого периода – 12ч25м.

2.8. В движении вокруг центра Галактики участвуют как Солнце, так и все окрестные звезды, однако величины и направления их скоростей немного отличаются. Апекс в созвездии Геркулеса есть направление скорости Солнца относительно группы ближайших звезд, также обращающихся вокруг центра Галактики. Величина этой скорости составляет около 20 км/с.

### 10-11 классы

2.9. Венера движется по орбите со скоростью  $u = 35.0$  км/с. Земля находится в 1.38 раз дальше от Солнца, чем Венера, и полутень Венеры на расстоянии Земли будет двигаться со скоростью  $u_* = 48.4$  км/с. Но Земля сама движется по орбите в том же направлении со скоростью  $v = 29.8$  км/с, и скорость полутени относительно Земли составит  $u_* - v = 18.6$  км/с. Если прохождение Венеры по диску Солнца центральное, и край полутени будет двигаться по Земле вдоль своей нормали, то он пересечет Землю с экваториальным диаметром 12756 км за 686 секунд или за 11 минут 26 секунд. Именно настолько могут отличаться моменты контактов Венеры и Солнца в разных точках Земли. В 2004 году прохождение не будет центральным, поэтому эта разница будет несколько больше.

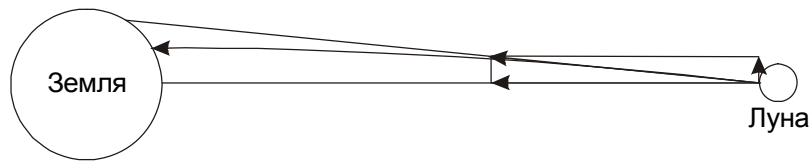


2.10. По причине эллиптичности орбиты Земли и наклона ее экватора к эклиптике промежуток между двумя последующими верхними кульминациями Солнца не остается постоянным. Истинный солнечный полдень наступает в  $12ч + \eta$  по местному времени, где величина  $\eta$  называется уравнением времени. В конце декабря и начале января, вблизи зимнего солнцестояния и прохождения Земли точки перигелия орбиты, угловая скорость вращения Земли вокруг Солнца превосходит среднюю за год, к тому же, прямое восхождение Солнца быстрее возрастает из-за его движения вдали от небесного экватора. В результате, промежуток между двумя полуднями примерно на полминуты превосходит 24 часа, и уравнение времени быстро увеличивается, из-за чего каждый день и восход, и заход Солнца происходят чуть позже, чем в предыдущий день.

Этот эффект особенно заметен в тропических широтах, где изменение склонения меньше влияет на время восхода и захода Солнца. Там дата самого позднего восхода Солнца смещается на еще более поздние даты января, а вблизи экватора – даже на февраль – эпоху максимума величины  $\eta$ . Вблизи Полярного Круга, где Солнце лишь ненадолго показывается над горизонтом, резкие изменения долготы дня приводят к тому, что дата самого позднего восхода Солнца приближается ко дню зимнего солнцестояния – 22 декабря.

2.11. Снаряд запускался с поверхности Луны, которая сама движется относительно Земли по орбите со скоростью 1 км/с. В результате, снаряд вылетит не в направлении центра Земли, а под углом около  $0.7^\circ$  к этому направлению. Но этот угол меньше, чем угловой радиус Земли,

наблюдаемой с Луны (около  $1^\circ$ ). Гравитационное влияние Земли и Солнца превратит траекторию снаряда из прямой в гиперболу, что еще приблизит траекторию к центру Земли. Снаряд попадет на поверхность Земли, если, конечно, не сгорит в ее атмосфере. Движение Земли по орбите со скоростью около 30 км/с никак не повлияет на результат, так как в этом движении участвует вся система Земля-Луна, в том числе и снаряд.



2.12. По данным длинам волн можно вычислить величину красного смещения галактики:

$$z = \frac{\lambda(H_\alpha)}{\lambda(H_\beta)} - 1 = 0.35.$$

При таких значениях  $z$  для лучшей точности нужно воспользоваться релятивистской формулой для красного смещения. Расстояние до галактики можно вычислить по закону Хаббла:

$$R = \frac{c}{H} \frac{z^2 + 2z}{z^2 + 2z + 2}.$$

Подставляя численные значения, получаем  $1.34 \cdot 10^9$  пк (здесь  $c$  – скорость света,  $H$  – постоянная Хаббла).

Блеск сверхновой  $m$  с такого расстояния составлял  $22^m$ , следовательно, в центре нашей Галактики, с расстояния  $r = 8000$  пк ее блеск  $m_1$  был бы равен

$$m_1 = m + 5 (\lg r - \lg R) = -4.1,$$

и сверхновая выглядела бы как Венера на земном небе.

## II ТУР

### 7 класс и моложе

2.13. Утверждение 1 справедливо на экваторе Земли, если не принимать во внимание атмосферную рефракцию. В этом случае долгота дня будет всегда равна 12 часам, а дважды в год, в дни равноденствий, Солнце будет проходить через зенит, и вертикальные предметы не будут отбрасывать тени. Там же, на экваторе, справедливо и утверждение 3, правда с некоторой натяжкой, так как направление рогов серпа Луны может отклоняться от вертикального на угол до  $18.3^\circ$  в период «низкой Луны» и  $28.6^\circ$  в период «высокой Луны». А вот утверждение 2 не может быть верно нигде, разве что кроме Южного Полюса, где все направления – на север. В период с 23 сентября до 21 марта Солнце восходит на юго-востоке, а заходит на юго-западе во всех районах Земли, где оно только появляется над горизонтом.

2.14. Во время соединения Венера находится к нам ближе, чем Марс, вне зависимости от своей конфигурации. Диаметр Венеры больше диаметра Марса, следовательно, ее угловые размеры были также больше.

2.15. Созвездие Дракона, по направлению из которого вылетают метеоры Драконид, находится в районе полюса эклиптики. Эти метеоры будут лететь к Земле с севера почти перпендикулярно к направлению движения Земли, и их скорость относительно Земли будет практически такой же (на

самом деле, чуть меньшей), чем их скорость относительно Солнца. Созвездие Ориона в октябре располагается в направлении движения Земли, и метеоры Орионид будут лететь навстречу Земле, что сильно увеличит их относительную скорость. Метеоры Орионид – одни из самых быстрых, наблюдаемых на Земле.

2.16. Планеты на небе располагаются вблизи эклиптики. Эклиптика пересекается с Млечным Путем в созвездии Стрельца и на границе созвездий Тельца и Близнецов. В этих районах неба и могла располагаться планета. Ее противостояние в этих случаях наступает, соответственно, в июне или в декабре, то есть вблизи летнего или зимнего солнцестояния.

2.17. Интервал между покрытиями в условии задачи меньше звездного периода обращения Луны (27.3 дня). Следовательно, Марс в это время двигался на небе относительно звезд навстречу Луне, с востока на запад. Это могло быть только вблизи противостояния Марса, следовательно, фаза Луны была близка к полной.

### 8-9 классы

2.18. Обе звезды имеют северное склонение, меньшее широты Полярного круга, а вторая из них является вообще незаходящей за горизонт на Северном Полярном круге. Поэтому первая из звезд может находиться на востоке, юге и западе, а вторая – во всех четырех направлениях. Но вспомним, что когда звездное время равно 18 часам, Солнце на Северном Полярном круге оказывается на горизонте независимо от времени года. В этот момент небо всегда будет светлым, и в этот же момент первая звезда оказывается на юге, а вторая – на севере. В итоге, первая звезда может наблюдаться на ночном небе только на востоке и западе, а вторая – на востоке, юге и западе.

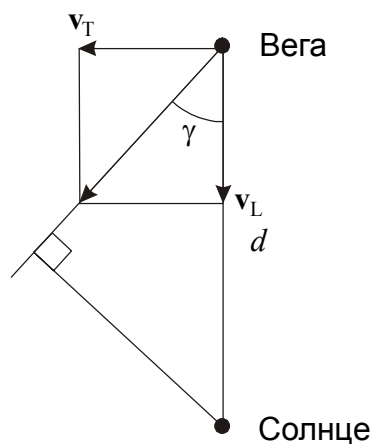
2.19. По данным условия задачи, расстояние до Веги в настоящий момент составляет

$$d = 1 / \pi = 7.76 \text{ пк},$$

а ее тангенциальная скорость равна

$$v_T = \alpha d = \alpha / \pi = 2.71 \text{ а.е./год} = 12.9 \text{ км/с}.$$

Здесь годичный параллакс и собственное движение обозначены соответственно как  $\pi$  и  $\alpha$ .



Лучевая скорость равна  $-14 \text{ км/с}$ , значит, Вега приближается к Солнцу, двигаясь под углом

$$\gamma = \arctg \left| \frac{v_T}{v_L} \right| = 42.7^\circ$$

относительно направления на Солнце. Из этого можно сделать вывод, что Вега никогда не приблизится к нам на расстояние  $d/2$ . Ее минимальное расстояние до Солнца составит

$$d \sin \gamma = 5.26 \text{ пк},$$

и это случится через время

$$\Delta t = \frac{d \cos \gamma}{\sqrt{v_L^2 + v_T^2}},$$

что составляет около 290 тысяч лет.

2.20. До отстрела контейнера скорость корабля вместе с контейнером была равна первой космической скорости  $v_1$ , соответствующей данному расстоянию от планеты. Для того, чтобы контейнер с массой  $m$  упал по вертикали на поверхность планеты, его скорость после отстрела должна быть равна нулю. При этом скорость космического аппарата с массой  $M$  становится равной второй космической скорости  $v_2 = v_1 \cdot \sqrt{2}$ . По закону сохранения импульса получаем:

$$(M + m)v_1 = M v_1 \sqrt{2}.$$

Из этого уравнения вытекает, что масса корабля составляет

$$M = \frac{m}{\sqrt{2} - 1} = m(\sqrt{2} + 1),$$

то есть 2.414 тонны.

2.21. В задаче сразу же напрашивается тривиальное решение – радиус орбиты астероида равен радиусу орбиты Марса. Однако такое решение не может реализоваться практически, так как в этом случае астероид и Марс окажутся в одной точке пространства. Найдем другие решения.

Синодический период внешней планеты  $S$  (а нас интересуют только такие, раз речь идет о противостоянии) связан с периодом обращения этой планеты и Земли  $T$  и  $T_0$  соотношением

$$S = \frac{T_0 T}{T - T_0}.$$

Однако нужно сразу оговорить, что эта формула справедлива для планеты или астероида, обращающегося вокруг Солнца в том же направлении, что и Земля. Марс этому условию удовлетворяет, обозначения  $T$  и  $S$  будут далее относиться к нему. Для выполнения условия задачи синодический период астероида  $S_*$  не обязательно должен быть равен синодическому периоду Марса  $S$ , но может быть меньше в целое число раз:

$$S_* = S/n.$$

Период обращения астероида вокруг Солнца будет равен

$$T_* = \frac{T_0 S_*}{S_* - T_0} = \frac{T_0 T}{T - n(T - T_0)}.$$

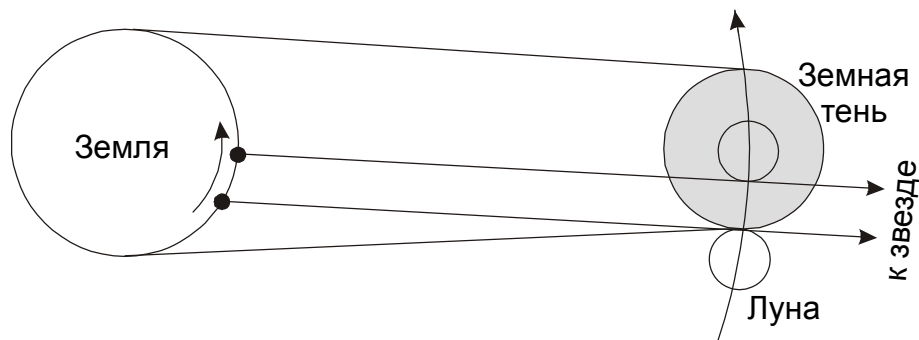
Случай  $n=1$  соответствует упомянутому выше тривиальному решению, а при  $n=2$  мы получаем период обращения астероида 15.8 лет. По III закону Кеплера радиус его орбиты оказывается равным 6.3 а.е. Решения с  $n > 3$  приводят к отрицательным значениям периода  $T_*$ . Фактически эти

решения относятся к случаю обратного направления вращения астероида, для которого последняя формула будет иметь вид:

$$T_* = \frac{T_0 S_*}{T_0 - S_*} = \frac{T_0 T}{n(T - T_0) - T}$$

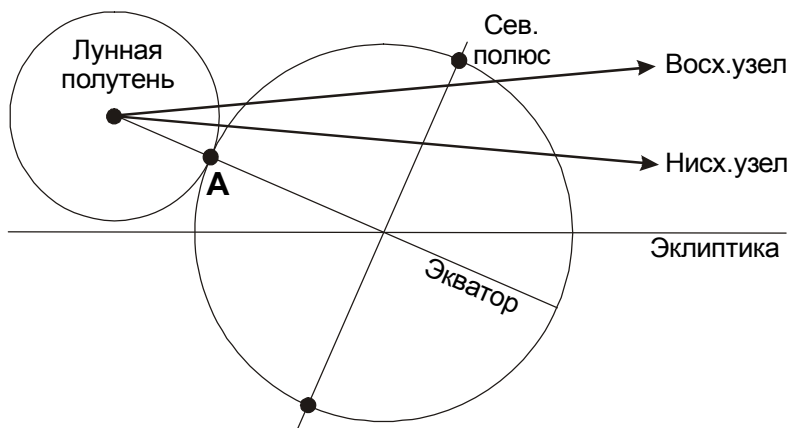
При этом астероид остается внешним, и период  $T_*$  должен превышать один год. Этому условию удовлетворяют случаи  $n=3$  и  $n=4$ , период обращения астероида для этих случаев составляет соответственно 2.47 и 1.14 года, а радиус орбиты – 1.82 и 1.09 а.е.

2.22. В том, что автор не прав, можно убедиться хотя бы потому, что центральные покрытия звезд Луной в тропической зоне Земли могут длиться почти 2 часа (см. решение задачи 4.13), а при центральном затмении Луна за час полностью погружается в тень Земли. А ошибка автора заключается в следующем: при наблюдении с поверхности нашей планеты центр земной тени *не будет* совпадать с антисолнечной точкой. Как и любое физическое тело, расположенное близко от Земли (на расстоянии Луны), тень будет испытывать параллактическое смещение с амплитудой до 1 градуса и периодом в одни солнечные сутки. В своем движении по небу центр тени вблизи полуночи будет совершать попятное движение, похожее на движение планет вблизи противостояния. И в течение частной фазы затмения тень вполне может «наползти» на звезду, у которой параллактического смещения нет (см. рисунок). Это никак не скажется на самой звезде, но существенно скажется на виде края диска Луны, из-за которого эта звезда появится.

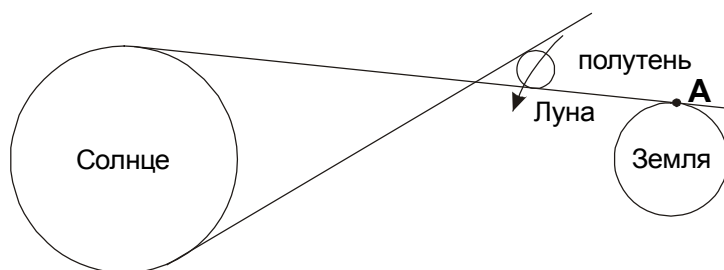


**10-11 классы**

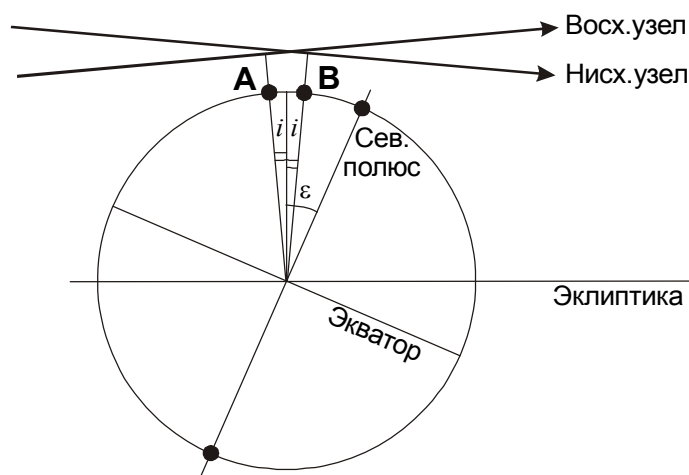
2.23. Описанная в обеих задачах ситуация весьма схожа, поэтому решения обеих задач будут описаны вместе. На рисунке показано взаимное положение Земли и лунной полутени при наблюдении с Солнца, причем горизонтальная линия соответствует плоскости эклиптики. В день весеннего равноденствия экватор Земли в данной проекции будет проходить по диаметру диска Земли под углом  $23.45^\circ$  к плоскости эклиптики, а северный полюс нашей планеты будет располагаться в задней части диска Земли по отношению к ее орбитальному движению.



В условии задачи а) описана ситуация, при которой диск Луны на горизонте касается солнечного диска точно сверху. Такое может иметь место только в тот момент, когда лунная полутень только касается Земли, то есть, в самом начале или конце затмения на Земле, как видно из следующего рисунка, где показан вид системы с севера.



В условии сказано, что затмение только начинается, и лунная полутень вступает на Землю в точке экватора (точка А на обоих рисунках). Полутень движется относительно Земли вместе с Луной в направлении, обратном движению системы Земля-Луна по орбите, под углом  $5.15^\circ$  к эклиптике вверх или вниз в зависимости от того, у какого узла орбиты Луны происходит затмение. Однако в обоих случаях, как видно на рисунке, наибольшая фаза затмения будет видна в северном полушарии Земли, а в данной точке на экваторе затмение будет лишь частным.



Ситуация, описанная в задаче b) отличается тем, что затмение видно на Земле только как частное, и центр лунной полутени вообще не вступает на поверхность нашей планеты. На рисунке показано движение центра полутени для обоих случаев (Луна в восходящем или нисходящем узле). Наибольшая фаза затмения будет видна на краю диска Земли, ближайшем к центру тени – в точках А и В для восходящего и нисходящего узла соответственно. Угол  $i$  равен  $5.15^\circ$ , а угол  $\varepsilon$  составляет  $23.45^\circ$ . Широта точек А и В составляет:

$$\varphi = 90^\circ - \varepsilon - i = 61.4^\circ \text{ для восходящего узла,}$$

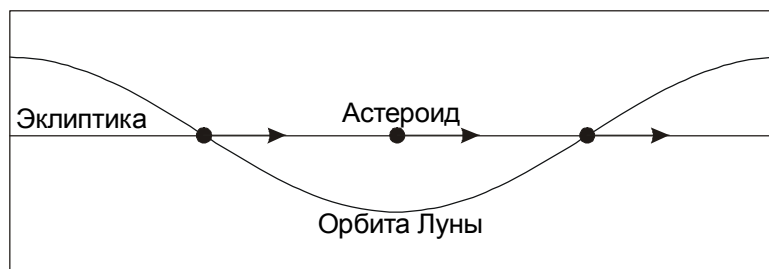
$$\varphi = 90^\circ - \varepsilon + i = 71.7^\circ \text{ для нисходящего узла.}$$

В обоих случаях затмение будет видно на горизонте западнее полуденной линии, то есть утром, на восходе Солнца.

2.24. В течение периода вечерней видимости, от верхнего до нижнего соединения, угловая скорость движения Венеры среди звезд постепенно уменьшается. До момента наибольшей восточной элонгации она больше, чем у Солнца, после этого момента – меньше, а после прохождения точки стояния она меняет знак, становясь отрицательной. Марс, находясь недалеко от Солнца (в соединении с Венерой), двигается только прямо, а угловая скорость его движения всегда меньше угловой скорости движения Солнца.

Очевидно, что два соединения Венеры с Марсом могут произойти, если в первом из этих соединений Венера обгонит Марс в своем движении среди звезд, а во втором Марс обгонит замедлившуюся или ужедвигающуюся попятно Венеру (вступить во второе соединение с Марсом, обогнав его на целый круг, Венера не успеет, так как на это ей потребуется больше года). Но в этом случае второе соединение не может наступить до момента наибольшей элонгации, когда Венера движется по небу быстрее Марса. Поэтому вариант в) в условии задачи невозможен. Варианты а) и б) возможны и часто реализуются.

2.25. Такая ситуация может иметь место только в одном случае – если астероид движется вдоль эклиптики синхронно с узлами лунной орбиты, никогда не встречаясь с ними. Для этого астероид должен двигаться вокруг Солнца в обратном направлении (по часовой стрелке), делая один оборот, как и лунные узлы, за 18.6 лет. По закону Кеплера радиус его орбиты получается равным 7.02 а.е.



2.26. Так как мы наблюдаем затмения, Земля находится вблизи плоскости орбит двух компонент двойной системы и вблизи плоскости аккреционного диска. Размеры белого карлика и толщина аккреционного диска много меньше размеров гиганта, и падение блеска может вызвать только затмение карлика гигантом. Раз при этом суммарный блеск системы уменьшается на  $0.1^m$ , значит светимость белого карлика примерно в 10 раз меньше светимости звезды-гиганта.

Зная период обращения  $T$  (45.5 суток или  $1/8$  года) и относительную скорость звезд  $v$  (120 км/с), мы получаем расстояние между звездами:

$$R = \frac{vT}{2\pi} = 0.5 \text{ а.е.}$$

По III обобщенному закону Кеплера получаем, что суммарная масса системы составляет 8 масс Солнца. При этом амплитуда изменения скорости у белого карлика в 7 раз больше, чем у гиганта, следовательно, масса гиганта – 7 масс Солнца, масса карлика – 1 масса Солнца.

Во время затмения мы видим только звезду-гигант, ее блеск  $m$  на нашем небе равен  $4.7^m$ , из измерений параллакса расстояние до нее  $r = 100$  пк. Следовательно, абсолютная звездная величина гиганта равна



$$m_0 = m + 5 - 5 \lg r = -0.3,$$

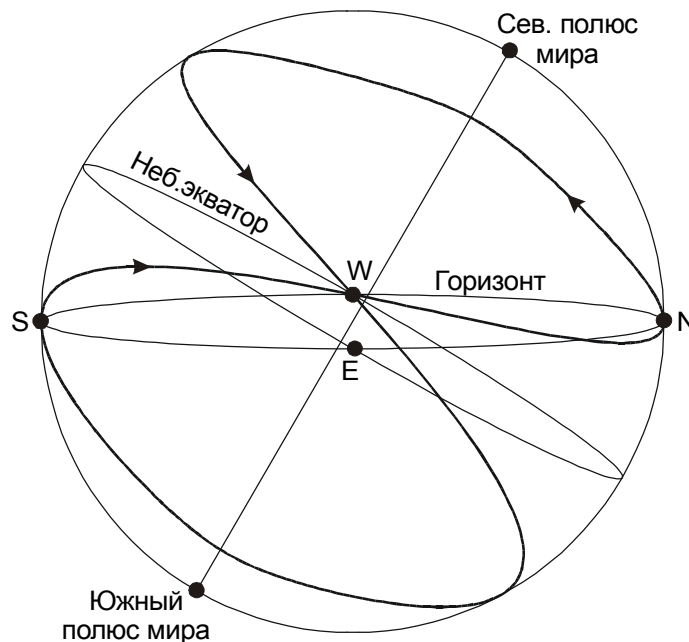
то есть светимость гиганта в 100 раз больше солнечной. Светимость белого карлика  $I$  получается равной 10 светимостям Солнца, т.е.  $3.88 \cdot 10^{27}$  Вт.

Для оценки темпа аккреции примем, что вся кинетическая энергия падающего на белый карлик вещества за период времени  $\Delta t$  переходит в излучение. Эта же величина равна потенциальной энергии упавшего вещества со знаком минус:

$$I \Delta t = GMM^* \Delta t \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{d} \right),$$

где  $M$  и  $r$  – масса и радиус белого карлика,  $d$  – расстояние от белого карлика до точки либрации, с которой начинается аккреция,  $M^*$  – темп аккреции. Расстояние  $d$ , по порядку величины равно расстоянию между звездами  $R$ , значительно больше радиуса белого карлика, и потенциальной энергией вещества в точке либрации можно пренебречь, исключая слагаемое  $(1/d)$  в последней формуле. Подставляя далее численные значения, получаем  $M^* = 1.9 \cdot 10^{14}$  кг/с или  $3 \cdot 10^{-9}$  масс Солнца в год.

2.27. Такой необычный путь звезды по небу (он показан на рисунке) может быть только в случае, если продолжительность солнечных суток сопоставима с продолжительностью года. Заход звезды в точке запада (стороны горизонта на рисунке помечены латинскими буквами) может происходить только в момент равноденствия. После одного из таких заходов звезда появляется на севере, имея положительное склонение, после другого – на юге, с отрицательным склонением. Наклон небесного экватора к плоскости эклиптики велик, и центральная звезда появляется над горизонтом в каждое летнее солнцестояние и скрывается за ним в каждое зимнее солнцестояние. Следовательно, заходы звезды происходили в каждое равноденствие, а продолжительность года  $T$  была равна двум солнечным суткам этой планеты, то есть 32.28 земным суткам. Восход звезды на севере происходит еще задолго до летнего солнцестояния, но склонение звезды уже равно  $+30^\circ$ . Следовательно, наклон экватора планеты к плоскости орбиты еще больше, составляя около  $50^\circ$  (точный анализ для случая круговой орбиты дает значение  $53.65^\circ$ ).



Схожесть температурного режима этой планеты с земным означает, что поток энергии от звезды на расстоянии планеты равен потоку солнечной энергии на Земле. Из этого следует связь светимости звезды  $L$  и расстояния до планеты  $R$ :

$$\frac{L}{R^2} = \frac{L_0}{R_0^2}.$$

Здесь  $L_0$  – светимость Солнца,  $R_0$  – расстояние от Солнца до Земли. Звезда относится к главной последовательности, и ее масса  $M$  связана со светимостью соотношением

$$\frac{L}{M^3} = \frac{L_0}{M_0^3}.$$

Здесь  $M_0$  – масса Солнца. Наконец, по третьему закону Кеплера, с учетом малости массы планеты по сравнению с массой звезды мы получаем связь периодов обращения планеты  $T$  и Земли  $T_0$ :

$$\frac{T^2 M}{R^3} = \frac{T_0^2 M_0}{R_0^3}.$$

Из этих трех уравнений получаем связь массы звезды и радиуса орбиты планеты с периодом ее обращения:

$$\frac{M^7}{M_0^7} = \frac{T^4}{T_0^4}, \quad \frac{R^7}{R_0^7} = \frac{T^6}{T_0^6}.$$

В итоге, масса звезды получается равной 1/4 массы Солнца, а радиус орбиты – 1/8 а.е.

## Часть 3. 59 Московская Астрономическая Олимпиада (2005 год)

### I ТУР

#### 7 класс и моложе

3.1. Промежутки времени между восходом и верхней кульминацией и верхней кульминацией и заходом звезды равны друг другу, следовательно, предыдущий восход звезды произошел в 17ч00м в предшествующий день. Промежуток времени между двумя восходами звезды равен одним звездным суткам, составляющим около 23ч56м (за счет обращения Земли вокруг Солнца один год содержит звездных суток на один больше, чем солнечных). В результате, ближайший восход звезды произойдет в 16ч56м.

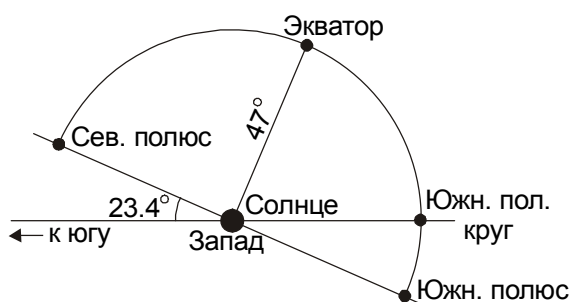
3.2. Хвост кометы направлен в пространстве и на небе в сторону, противоположную Солнцу. В эту же сторону направлены рога серпа Венеры. Следовательно, хвост кометы будет направлен в ту же сторону, что и рога серпа Венеры.

3.3. Планета Меркурий всегда располагается на небе вблизи эклиптики не далее чем в 28 градусах от Солнца. 22 июня, в день летнего солнцестояния, Солнце в Санкт-Петербурге погружается под горизонт неглубоко и ненадолго. Все это время остается достаточно светло. Даже если Меркурий в этот день окажется в наибольшей элонгации, его склонение будет меньше солнечного, и он будет восходить незадолго до него или заходить сразу же после Солнца, оставаясь невидимым на ярком фоне зари. Находясь в верхнем или нижнем соединении, Меркурий тем более не может быть виден рядом с ярким Солнцем.

3.4. Яркость собственного излучения небесного тела в инфракрасных лучах сильно зависит от его температуры. Когда Луна находится в первой четверти, на ее видимом полушарии утро, и Солнце только восходит или недавно взошло над горизонтом. В это время ее поверхность в среднем холоднее, чем во время последней четверти, когда на видимом полушарии вечер. Кроме этого, во время последней четверти Солнце освещает более темные области видимого полушария Луны (океан Бурь и окрестные моря), которые от этого сильнее нагреваются. В результате, Луна в последней четверти в инфракрасных лучах ярче, чем в первой четверти.

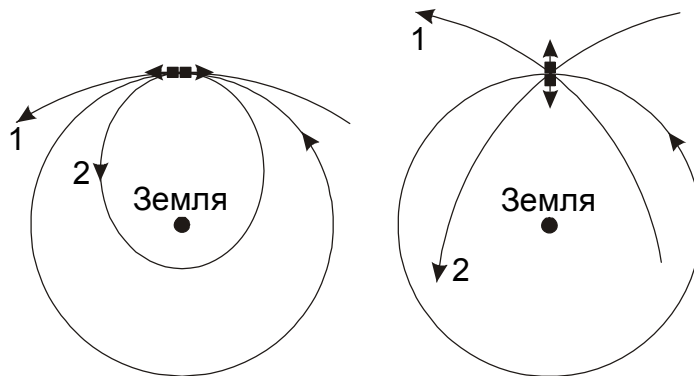
#### 8-9 классы

3.5. Во время наибольшей восточной элонгации Венера находится в  $47^\circ$  восточней Солнца вдоль эклиптики, то есть, учитывая дату, в созвездии Овна. В это время она лучше всего видна по вечерам. В момент захода Солнца, имеющего координаты  $\alpha = 0^h$ ,  $\delta = 0^\circ$ , звездное время составляет 6 часов. Положение Венеры на небе в момент захода Солнца для различных широт показано на рисунке. В это время на Южном полярном круге эклиптика совпадает с горизонтом, и Венера зайдет за горизонт одновременно с Солнцем, а взойдет значительно позже него. При дальнейшем смещении на юг условия видимости Венеры, имеющей северное склонение, будут еще хуже – она будет видна на небе только днем или не будет видна вообще.



В экваториальной зоне и северном полушарии Земли Венера будет находиться над горизонтом после захода Солнца, и лишь вблизи Северного полюса ее не удастся увидеть на темном небе, так как Солнце там не будет заходить за горизонт. С учетом угловых размеров Солнца окончательный ответ таков: Венера будет видна на небе, когда на нем не будет Солнца, на широтах от  $-66.2^\circ$  до  $+89.8^\circ$ .

3.6. По III закону Ньютона в результате работы двигателя в стержне две одинаковые части спутника получают приращения скорости, равные по величине и противоположные по направлению. Если перед нами стоит задача вывести из поля тяготения Земли только одну часть, то можно использовать ее вращение вокруг Земли, придав ей дополнительную скорость в этом же направлении (левый рисунок). При этом второй спутник перейдет на эллиптическую орбиту.



Приращение скорости, которое получит первая часть спутника, равна разности второй и первой космических скоростей для данного расстояния от Земли:

$$\Delta v = v_2 - v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} - \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{GM}{R}}(\sqrt{2} - 1).$$

Здесь  $M$  – масса Земли,  $R$  – радиус круговой орбиты спутника, равный среднему расстоянию до Луны. Вторая часть спутника получает такое же по модулю приращение скорости. В системе отсчета, двигавшейся до включения двигателя вместе со спутником, обе части покоились, а после его работы они стали двигаться со скоростью  $\Delta v$ . Следовательно, полученная ими энергия равна

$$E = \frac{m(\Delta v)^2}{2} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} \frac{GMm}{R},$$

что составляет  $8.89 \cdot 10^6$  Дж. Здесь  $m$  – масса спутника (обеих частей вместе).

Если же необходимо вывести на параболические орбиты обе половины спутника, то придавать им импульс, параллельный направлению их орбитального движения, уже не будет энергетически выгодно, так как это будет способствовать переводу на параболическую орбиту одной половины, но существенно затруднит перевод второй половины. Проще всего придать обеим частям приращение скорости, перпендикулярное их орбитальному движению (правый рисунок). Чтобы обе части после импульса имели вторую космическую скорость, приращение должно быть равным

$$\Delta v = \sqrt{v_2^2 - v_1^2} = \sqrt{\frac{GM}{R}},$$

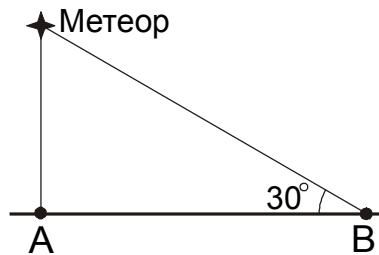
то есть первой космической скорости. Для этого потребуется энергия

$$E = \frac{m(\Delta v)^2}{2} = \frac{GMm}{2R},$$

равная  $5.18 \cdot 10^7$  Дж. Этот же результат можно напрямую получить из закона сохранения энергии с учетом того, что все части спутника в результате покинут окрестности Земли. Обратите внимание, что данная энергия почти в 6 раз больше, чем в случае вывода на параболическую орбиту только одной половины спутника!

3.7. Явления метеоров происходят на высотах порядка 100 км. Это значительно меньше радиуса Земли, и для решения задачи мы можем забыть о сферичности нашей планеты и считать ее плоской. Из рисунка видно, что расстояние от метеора до точки **В**, где он был виден на высоте  $30^\circ$ , в  $(1/\sin 30^\circ)=2$  раза больше, чем из точки **А**, находящейся прямо под метеором. Следовательно, его блеск в точке **В** без учета атмосферного поглощения составил

$$m = 0 + 5 \lg 2 = 1.5.$$



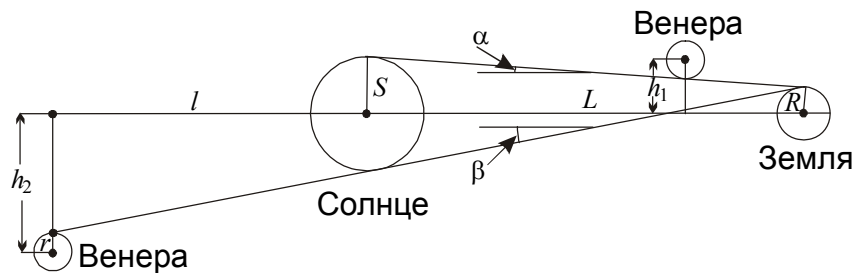
3.8. Промежуток между двумя покрытиями Солнцем далекой звезды (если звезда абсолютно неподвижна, этот промежуток равен периоду обращения Земли вокруг Солнца) и тропический год – разные промежутки времени, хотя и очень близкие друг к другу. Причина разницы состоит в явлении прецессии земной оси, из-за которого точка весеннего равноденствия движется по эклиптике навстречу видимому движению Солнца, завершая один оборот примерно за 26000 лет. В результате, возвращаясь к той же звезде, Солнце совершает чуть более одного оборота относительно точки весеннего равноденствия. За этот период проходит  $1 + (1/26000)$ , то есть около 1.00004 тропического года.

### 10-11 классы

3.9. Момент захода любой звезды на какой-либо фиксированной широте соответствует определенному звездному времени, не зависящему от сезона года. Каждый последующий день Солнце кульминирует примерно на 4 минуты позже по звездному времени, однако звездное время захода Солнца и окончания вечерних сумерек смещается на другую величину. В начале февраля продолжительность светового дня на широте Москвы увеличивается, и звездное время захода Солнца каждый последующий день возрастает более чем на 4 минуты. Поэтому продолжительность вечерней видимости звезды **А** в феврале будет быстро уменьшаться, и вскоре эта звезда исчезнет в лучах заходящего Солнца.

В августе, когда продолжительность светового дня уменьшается, звездное время захода Солнца увеличивается значительно медленней. За счет более раннего наступления темноты звезда **В** будет видна по вечерам еще долго после 1 августа.

3.10. Выясним, при каких условиях наступают прохождения Венеры по диску Солнца или за ним. Обозначим через  $S$ ,  $R$  и  $r$  радиусы Солнца, Земли и Венеры, а через  $L$  и  $l$  – расстояния от Солнца до Земли и Венеры (будем считать их орбиты круговыми).



На рисунке видно, что для наступления прохождения Венеры по диску Солнца нужно, чтобы Венера хотя бы задела краем конус, описанный вокруг поверхностей Солнца и Земли. Учтем, что все угловые величины, о которых пойдет речь, малы. В этом случае угол раствора конуса  $\alpha$  равен

$$\alpha = \frac{S - R}{L}.$$

Прохождение произойдет, если в момент нижнего соединения Венера будет отстоять от плоскости эклиптики на расстояние, не превышающее величину  $h_1$ :

$$h_1 = S - \alpha l + r = S \left(1 - \frac{l}{L}\right) + R \frac{l}{L} + r = 203700 \text{ км.}$$

В случае покрытия Венеры Солнцем угол раствора конуса составит

$$\beta = \frac{S + R}{L},$$

а максимальное расстояние Венеры от плоскости эклиптики в момент уже верхнего соединения

$$h_2 = S + \beta l + r = S \left(1 + \frac{l}{L}\right) + R \frac{l}{L} + r = 1210100 \text{ км.}$$

В течение своего орбитального периода Венера может отходить от плоскости эклиптики на значительно большие расстояния (более 6 млн. км). Поэтому вероятность наступления прохождения по диску Солнца или за ним можно считать пропорциональной величине  $h_1$  или  $h_2$ , соответственно. А это значит, что прохождения за диском Солнца происходят в среднем в  $h_2/h_1 = 5.94$  раза чаще, чем прохождения по его диску.

Интересно, что прохождения Венеры за диском Солнца происходят в ту же эпоху и в том же календарном месяце, что и прохождения по диску дневного светила. Так, более редкие прохождения Венеры по диску Солнца в июне 2004 и 2012 года сопровождаются сразу десятью покрытиями Венеры Солнцем, которые также происходят в июне каждые 8 лет с 1976 до 2048 года.

3.11. Расстояние между двумя звездами, входящими в пару, много меньше расстояния от них до Земли. Поэтому если во время главного максимума от нас скрыта какая-то угловая площадь  $S$  от диска одной звезды, то во время вторичного минимума закрытой будет та же площадь  $S$ , но на диске другой звезды. При этом каждое из покрытий может быть как полным, так и частным, и это заранее неизвестно.

Так как расстояния до обеих звезд можно считать одинаковыми, а потемнением дисков к краю мы по условию задачи пренебрегаем, то количество световой энергии, приходящей от одной звезды с фиксированной угловой площади  $S$ , по закону Стефана-Больцмана определяется исключительно температурой поверхности звезды  $T$  и пропорционально  $T^4$ . Обозначим суммарный поток от обеих звезд вне минимумов через  $J$  и вычислим уменьшение потока в каждом из минимумов. Для главного и вторичного минимумов соответственно получаем:

$$\Delta J_1 = J(1 - 10^{-0.4 \cdot 0.55}) = 0.4J$$

$$\Delta J_2 = J(1 - 10^{-0.4 \cdot 0.11}) = 0.1J$$

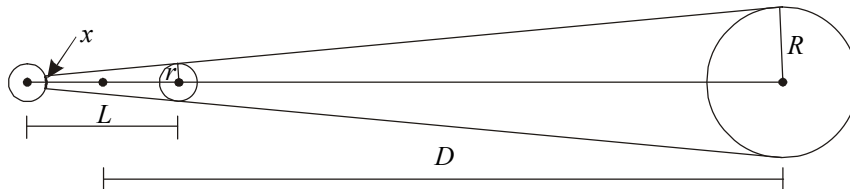
Получается, что количество световой энергии, поступающей с одинаковых площадок двух звезд, отличается в 4 раза, следовательно, их эффективные температуры различаются в  $\sqrt{2} = 1.41$  раз. При этом во время главного максимума затмевается более горячая звезда.

Однако без дополнительной информации мы ничего не можем сказать о том, какие затмения полные, а какие – частные. Поэтому мы не сможем определить соотношение радиусов и светимостей звезд. Без спектральных наблюдений не удастся найти и соотношение их масс.

3.12. В указанной системе звезда и обе планеты все время находятся на одной прямой, и взаимные расстояния между всеми небесными телами не изменяются. Обозначим радиусы звезды и планет через  $R$  и  $r$ , расстояние от звезды до центра масс двойной планеты через  $D$ , а расстояние между планетами через  $L$ . Масса звезды равна  $M$ , масса каждой из планет –  $m$ . Система вращается как единое целое с угловой скоростью  $\omega$ . Запишем уравнения движения внутренней и внешней планеты:

$$m\omega^2 \left(D - \frac{L}{2}\right) = \frac{GMm}{\left(D - \frac{L}{2}\right)^2} - \frac{Gm^2}{L^2},$$

$$m\omega^2 \left(D + \frac{L}{2}\right) = \frac{GMm}{\left(D + \frac{L}{2}\right)^2} + \frac{Gm^2}{L^2}.$$



В условии сказано, что масса звезды значительно превышает массы планет. Из этого следует, что величина  $L$  много меньше, чем  $D$ , и слагаемые в правой части обоих уравнений можно переписать как:

$$\frac{GMm}{\left(D \mp \frac{L}{2}\right)^2} = \frac{GMm}{D^2} \pm \frac{GMmL}{D^3}.$$

Складывая и вычитая уравнения движения планет, получаем

$$m\omega^2 D = \frac{GMm}{D^2},$$

$$m\omega^2 L = \frac{2Gm^2}{L^2} - \frac{2GMmL}{D^3}.$$

Выражаем величину  $\omega$  из первого уравнения и подставляем во второе:

$$\frac{3GML}{D^3} = \frac{2Gm}{L^2}.$$

Из получившегося уравнения выводится связь между радиусами орбит:

$$L = D \left( \frac{2m}{3M} \right)^{1/3}$$

или, с учетом равенства плотностей планет и звезды,

$$L = \left( \frac{2}{3} \right)^{1/3} D \frac{r}{R}.$$

Тень ближней к звезде планеты имеет вид конуса, угол раскрытия которого (с учетом малости размеров планет по сравнению с размерами звезды) равен

$$\alpha = \frac{R-r}{D-L/2} \approx \frac{R}{D}$$

Пренебрегая размерами планеты по сравнению с величиной  $L$ , получаем величину радиуса тени на поверхности дальней планеты

$$x = r - \alpha L = r \left( 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{1/3} \right).$$

Наконец, фаза кольцеобразного теневого затмения дальней планеты составит

$$F = \frac{x}{r} = 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{1/3} = 0.13.$$

## II ТУР

### 7 класс и моложе

3.13. С северного полюса видно только северное небесное полушарие, а с южного – лишь южная половина неба. С обоих полюсов одновременно за счет явления атмосферной рефракции у самого горизонта можно увидеть небесные объекты, находящиеся на небесном экваторе. Таким объектом в дни равноденствий может быть Солнце. Однако, Солнцем весь список и исчерпывается. Луна, находясь вблизи небесного экватора, не будет видна ни на одном из полюсов, так как будет находиться под горизонтом из-за своего параллактического смещения, вдвое превышающего величину рефракции. Другие объекты небесной сферы слишком слабы, чтобы наблюдаться у самого горизонта на одном из полюсов, где в это время обязательно будет день. Даже во время полного солнечного затмения небо у горизонта остается очень светлым.

3.14. Для ответа на вопрос нужно вспомнить, что не все участки звездного неба светят одинаково ярко. Через небо проходит яркая полоса Млечного Пути, состоящая из огромного количества звезд. Число ярких звезд вблизи Млечного Пути также увеличивается. Летними, осенними и зимними ночами Млечный Путь виден на широте Москвы большой дугой, проходящей через все



небо на большой высоте над горизонтом (осенью – даже через область зенита). А вот весной Млечный Путь проходит низко над северным горизонтом и виден с трудом. Небо в это время значительно темнее. Нужно также учесть, что в марте небо заметно подсвечивается с поверхности Земли, еще покрытой снегом (особенно вблизи крупных городов), а с середины мая ночи становятся светлее, так как Солнце не опускается глубоко под горизонт. В результате получается, что самым темным ночное безлунное небо оказывается в апреле и начале мая.

3.15. Раз Венера находилась в наибольшей восточной элонгации как для Земли, так и для Марса, эти две планеты располагались в направлении, перпендикулярном радиусу-вектору Венеры (см. рисунок). Угловое расстояние Венеры от Солнца на Земле во время наибольшей элонгации составляет  $47^\circ$ , следовательно, Марс находился в  $133^\circ$  от Солнца к западу.

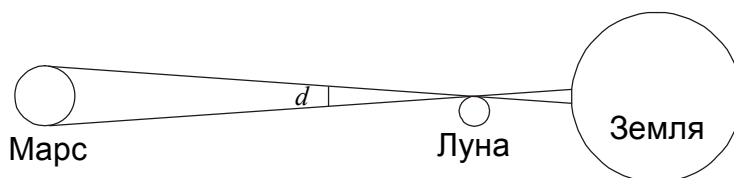


3.16. Для решения достаточно вспомнить, что шкала звездных величин – логарифмическая, и разница в одну звездную величину означает, что одна звезда ярче другой в  $K$  раз. Величина  $K$  равна примерно 2.512, хотя для решения это уже не принципиально. Если обозначить яркость звезды  $3^m$  за единицу, то яркость первой двойной будет равна  $2K$ , а второй –  $(K^2+1)$ . Очевидно, для любого значения  $K$ , превышающего единицу, второе выражение больше.

3.17. Увы – на этом снимке мы сталкиваемся с очередным необдуманым фотомонтажем. Такая фотография не могла быть получена ни из какой точки пространства. На ней Луна проецируется на темную часть диска Земли, следовательно, Луна должна находиться ближе к точке съемки, чем наша планета. Однако здесь мы сталкиваемся сразу с двумя противоречиями. Во-первых, как в этом случае угловые размеры Луны могут более чем в 4 раза уступать размерам более далекой Земли (по диаметру Луна меньше Земли в 3.67 раза), и, во-вторых, почему Луна повернута к наблюдателю видимым с Земли полушарием?

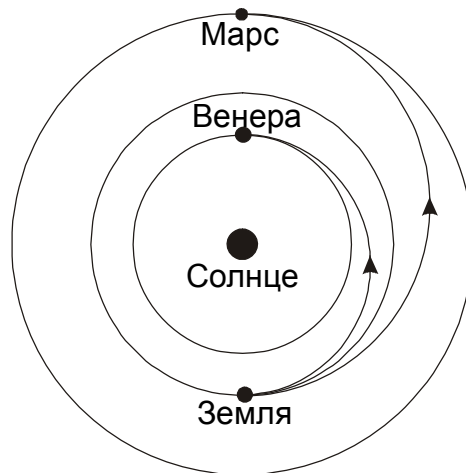
### 8-9 классы

3.18. Марс и Луна находились в зените, а Солнце – вблизи горизонта, примерно в  $90^\circ$  от обоих светил, покрытие происходило утром в тропическом поясе Земли. Следовательно, Луна находилась в последней четверти, а Марс – вблизи западной квадратуры. Расстояние до Марса в этой конфигурации можно вычислить по теореме Пифагора, оно получается равным 1.15 а.е., а его угловой диаметр –  $8.1''$ .



Как видно на рисунке, размер области видимости частного покрытия равен произведению расстояния от подлунной точки Земли до Луны и углового диаметра Марса  $d$  (в радианах), видимого с Луны (он практически не отличается от того, что мы видим с Земли). Эффект проекции на поверхность Земли не меняет эту ширину, так как покрытие наблюдается в зените. Подставляя числа, мы получаем ширину полосы частного покрытия около 15 км.

3.19. Энергетически наиболее выгодный путь запуска космического аппарата к другой планете Солнечной системы без последующих коррекций, если орбиты Земли и этой планеты считать круговыми – вывод аппарата на эллиптическую орбиту, касающуюся орбит Земли и этой планеты (см. рисунок). Если планета внутренняя, то аппарат начнет свое движение от Земли в афелии, а если внешняя – то в перигелии своей орбиты.



Обозначим через  $R$  и  $V$  расстояние от Солнца до Земли и скорость аппарата сразу после выхода на межпланетную орбиту, а через  $r$  и  $v$  – расстояние от Солнца до планеты – цели экспедиции и скорость аппарата при приближении к этой планете. Запишем уравнения законов сохранения момента импульса (II закон Кеплера) и энергии для этих двух точек орбиты:

$$RV = rv,$$

$$\frac{V^2}{2} - \frac{GM}{R} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r}.$$

Здесь  $M$  – масса Солнца. Выражая величину  $v$  из первого уравнения и подставляя во второе, получаем:

$$V^2 = \frac{2GMr}{R(R+r)} = V_0^2 \frac{2r}{R+r}.$$

Величина  $V_0$  есть орбитальная скорость Земли, равная 29.8 км/с. Подставляя значения  $r$  для обеих планет, получаем значения  $V$ , равные 27.3 км/с для полета к Венере и 32.7 км/с для полета к Марсу. Перейдя к системе отсчета, связанной с Землей, с которой производится старт, получаем, что скорость аппарата после преодоления земного притяжения должна составить 2.5 км/с для аппарата к Венере и 2.9 км/с для аппарата к Марсу. Выходит, что марсианская экспедиция требует несколько больших энергозатрат, чем полет такого же аппарата к Венере.

3.20. Если Солнце находится на горизонте, то оно либо только что взошло, либо скоро зайдет, либо, если дело происходит в полярных широтах, движется вдоль горизонта. Если Солнце восходит, то Луна восходит вслед за ним, уже сходя с солнечного диска. Если Солнце близится к заходу, то Луна, напротив, только вступает на диск Солнца. В обоих случаях полное затмение, даже если оно и произойдет на Земле, в данном пункте видно не будет. Наконец, если дело происходит в полярных широтах, полное солнечное затмение также не сможет наступить, так как в этой широтной полосе Луна не может перемещаться по диску Солнца в вертикальном направлении.

3.21. Имея в своем распоряжении такой фотометр, жители далекой планеты могли бы попробовать зарегистрировать падение блеска Солнца, связанное с прохождением по его диску самой большой

планеты Солнечной системы – Юпитера. Диаметр этой планеты в 9.7 раз меньше солнечного, и во время прохождения яркость Солнца уменьшится примерно на одну сотую часть. Если блеск Солнца на этой планете будет в 100 раз ярче, чем у звезды  $20^m$ , то есть  $15^m$ , то задача обнаружения планетной системы около Солнца вполне могла бы быть решена. Учитывая, что абсолютная звездная величина Солнца немногим ярче  $5^m$ , такое могло произойти на расстоянии до 1 кпк от Солнца, но, увы, только вблизи плоскости орбиты Юпитера.

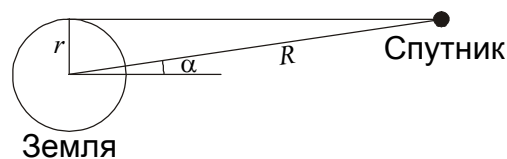
3.22. Центр круговой орбиты спутника находится в центре Земли. Если в каком-нибудь пункте Земли спутник оказывается в зените, то противоположная точка орбиты спутника попадает в надир. Однако спутник регулярно проходит через зенит, но никогда не приходит в надир, даже более – вообще не заходит за горизонт. Такое может быть только в том случае, если обращение спутника синхронизовано с вращением Земли, то есть период спутника  $T$  равен одним звездным суткам (около 23ч56м). Радиус этой орбиты равен

$$R = \left( \frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3},$$

что составляет 42.16 тысяч километров (здесь  $M$  – масса Земли). По размерам орбиты спутник похож на геостационарный, отличаясь от него существенным наклоном орбиты к экватору. Вычислим величину этого наклона, а также широту места наблюдения. Решим сначала эту задачу в приближенном виде, пренебрегая параллактическим смещением спутника (тем самым, считая размеры Земли много меньше размеров орбиты спутника).

По прошествии одних суток спутник возвращается в ту же точку неба. Предположим, что за это время спутник один раз попал в зенит и один раз опустился к горизонту. Когда спутник находился в зените, его склонение было равно  $\varphi$ , географической широте места наблюдения. Через 12 часов спутник имел склонение  $-\varphi$ . Сделав вместе с Землей половину оборота, он вновь находился на небесном меридиане и одновременно на горизонте. Из этого можно сделать вывод, что широта точки наблюдения составляла  $\pm 45^\circ$ . Наклонение орбиты спутника к экватору не может быть меньше  $45^\circ$ , однако не может быть и больше, так как в этом случае спутник заходил бы за горизонт.

Однако возможна и другая ситуация, при которой спутник будет проходить через зенит дважды в сутки и дважды в сутки опускаться к противоположным сторонам горизонта. Такая ситуация реализуется на экваторе при наклонении орбиты спутника к экватору под прямым углом. В обеих ситуациях спутник будет касаться горизонта на небесном меридиане, в точках севера или юга.



Скорректируем теперь полученные решения, учитывая параллактическое смещение спутника. Оно не влияет на его положение, когда он находится в зените, но существенно уменьшает его высоту вблизи горизонта. Спутник окажется уже на горизонте, когда его высота без учета параллакса составит

$$\alpha = \arcsin \frac{r}{R} = 8.7^\circ,$$

где  $r$  – радиус Земли. При этом его азимут не изменится, и он останется на небесном меридиане. Поэтому наша задача сводится к решенной выше, только наименьшая высота спутника должна быть равна не нулю, а углу  $\alpha$ . Такому условию удовлетворяют широта места и наклонение спутника, равные

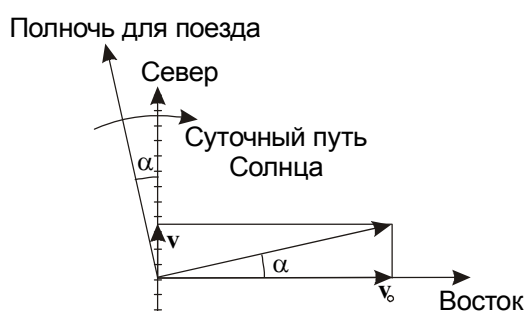
$$i_{1,2} = \pm(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) = \pm 40.65^\circ$$

в случае одного прохождения зенита в сутки. Два прохождения спутником зенита в сутки будут иметь место по-прежнему на экваторе, однако наклонение орбиты спутника будет равно

$$i_{3,4} = \pm(90^\circ - \alpha) = \pm 81.3^\circ.$$

### 10-11 классы

3.23. В 00ч00м по местному времени как для пассажира поезда, так и для неподвижного наблюдателя, стоящего рядом на станции, Солнце будет располагаться неглубоко под горизонтом точно в северном направлении. Однако, для пассажира этот момент не будет являться истинной солнечной полночью, так как Солнце в это время будет уже подниматься к горизонту за счет движения поезда. Полночь для него наступит раньше, и ее время можно определить с неплохой точностью, не прибегая к сложным тригонометрическим вычислениям.



Наблюдатель, стоящий на станции, только кажется неподвижным, на самом деле он движется вместе с вращающейся Землей в восточном направлении со скоростью

$$v_0 = \frac{2\pi R \cos \varphi}{T},$$

равной 835 км/ч. Здесь  $R$  – радиус Земли,  $T$  – продолжительность солнечных суток,  $\varphi$  – широта места наблюдения. Истинная солнечная полночь для этого наблюдателя наступает, когда Солнце располагается точно на севере, перпендикулярно направлению движения наблюдателя. Скорость движения пассажира поезда складывается из скорости вращения Земли  $v_0$  и движения поезда  $v$  (рисунок) и направлена под углом  $\alpha$  к параллели

$$\alpha = \arctg\left(\frac{v}{v_0}\right) = 8.2^\circ.$$

В этом случае полночь застанет Солнце не на севере, а в  $8.2^\circ$  левее. Учтем, что путь Солнца в это время проходит вблизи горизонта и практически параллелен ему, а за сутки Солнце проходит на небесной сфере путь  $360^\circ \cdot \cos \delta = 331.3^\circ$ . Здесь  $\delta$  – склонение Солнца, составляющее в июне около  $+23^\circ$ . Расстояние в  $8.2^\circ$  июньское Солнце пройдет за 36 минут, следовательно, самый темный момент ночи пассажир поезда зафиксирует в 23ч24м по местному времени.

3.24. Казалось бы, в условии задачи таится противоречие: Марс вступил в противостояние с Солнцем, находясь в это время на эклипике, то есть, точно в противоположной Солнцу точке неба. Где бы мы не находились, восход Солнца в восточном полукруге горизонта должен произойти одновременно с заходом Марса в западной части неба. Однако, этого противоречия можно избежать, если мы перенесемся в некоторую точку в полярных широтах, где Солнце и Марс будут находиться в точках севера и юга, их суточное движение будет направлено вдоль

горизонта, а пересекать его Солнце и Марс будут уже за счет своего движения по небу относительно звезд.

Вспомним, что во время противостояния Марс движется среди звезд попятно, навстречу движению Солнца. 1 мая Солнце имеет склонение около  $+15^\circ$ , и оно продолжает увеличиваться. Марс, находясь в противоположной точке неба, имеет склонение  $-15^\circ$ , но оно также увеличивается. Поэтому, если мы окажемся на широте  $+75^\circ$  в солнечную полночь, мы, к своему удивлению, увидим Солнце, восходящее на севере, и Марс, восходящий на юге!

3.25. Приливы, вызываемые Луной, наблюдались бы на Земле в любом случае, хотя их величина очень быстро уменьшается с расстоянием Луны от Земли. Однако, можно себе представить ситуацию, при которой величина приливов, вызываемых на Земле Луной и Солнцем, была бы одинакова. И если при этом Луна окажется в фазе первой или последней четверти, солнечные и лунные приливы могли бы компенсировать друг друга. Для решения задачи нужно найти радиус орбиты Луны в этом интересном случае.

Приливное ускорение  $a_T$  есть разность ускорений притяжения Луны (или Солнца) в точке Земли, ближайшей к Луне, и в центре Земли:

$$a_T = \frac{Gm}{(d-R)^2} - \frac{Gm}{d^2}.$$

Здесь  $m$  – масса Луны,  $d$  – расстояние до нее, а  $R$  – радиус Земли. Учитывая, что размеры Земли значительно меньше расстояния до Луны, это выражение можно переписать как

$$a_T = \frac{2GmR}{d^3}.$$

Лунные приливы будут равны по величине солнечным, если будет выполняться соотношение

$$\frac{2GmR}{d^3} = \frac{2GMR}{D^3},$$

где  $M$  и  $D$  – масса Солнца и расстояние до него. Расстояние до Луны для этого должно быть равным

$$d = D \left( \frac{m}{M} \right)^{1/3},$$

что составляет 498.2 тысячи километров. По третьему закону Кеплера получаем, что звездный период обращения Луны вокруг Земли был бы равен 40.3 суток, а синодический период – 45.3 дня. Дважды за этот период, в первой и последней четверти, то есть раз 22.7 суток, приливов и отливов на Земле наблюдаться не будет.

3.26. Туманность, излучая свет, остается прозрачной, поэтому сквозь нее видны более далекие объекты. В центральной части туманности мы регистрируем излучение как ее передней части, движущейся по направлению к нам, так и удаляющиеся задние области. Скорость расширения туманности связана с длинами волн краев полосы  $H\alpha$  соотношением

$$v = c \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}},$$

из которого мы получаем значение скорости, равное 1000 км/с. Считая эту скорость постоянной во времени, получаем, что за 10000 лет радиус туманности достиг  $3.16 \cdot 10^{14}$  км или 10 пк. При этом ее видимый диаметр составляет  $1^\circ$  или 0.017 радиан, из чего можно вычислить расстояние до туманности, равное  $r = (10 \cdot 2 / 0.017) = 1145$  пк. Вычислим абсолютную звездную величину горячей звезды, подсвечивающей туманность:

$$M = m + 5 - 5 \lg r = -7.3.$$

Светимость этой звезды в 64000 раз превосходит светимость Солнца. К спектральному классу O относятся самые горячие звезды, с температурой поверхности около 50000 К. Радиус звезды определяется из соотношения

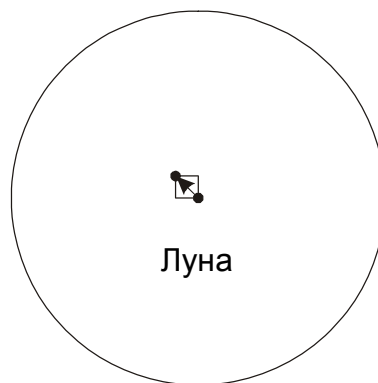
$$\frac{R}{R_0} = \sqrt{\frac{I}{I_0} \left( \frac{T_0}{T} \right)^2}.$$

Здесь  $R_0$ ,  $I_0$  и  $T_0$  – радиус, светимость и температура поверхности Солнца. Подставляя численные значения, получаем, что радиус звезды составляет 3.64 радиуса Солнца или 2.54 млн км.

3.27. Полное солнечное затмение произошло незадолго до прохождения Землей точки перигелия (начало января), когда угловой диаметр Солнца был близок к максимальному. Тем не менее, затмение было полным, и притом продолжительным. Такое может быть, только если Луна в этот момент была вблизи точки перигея орбиты.

Кроме этого, дата затмения пришлась практически на момент зимнего солнцестояния, когда Солнце на северном полярном круге едва показывается над горизонтом. Луна в момент затмения находилась вблизи одного из узлов своей орбиты. Если бы это был нисходящий узел, то в течение последующих суток склонение Луны бы не увеличилось (даже немного уменьшилось) и, с учетом параллактического смещения, Луна не могла бы появиться над горизонтом за северным полярным кругом. Следовательно, Луна находилась в восходящем узле своей орбиты.

В день затмения, вблизи точек перигея и восходящего узла орбиты, обе основные либрации Луны – по долготе и широте – были близки к нулю, и передатчик установили в истинный центр видимого полушария Луны. Однако по прошествии недели ситуация изменилась. Угловая скорость обращения Луны по орбите превысила угловую скорость ее вращения вокруг своей оси, и наступила восточная либрация по долготе, а место, куда был установлен передатчик, сместилось на диске Луны влево. Помимо этого, после прохождения восходящего узла Луна поднимется выше эклиптики, наступит южная либрация по широте, и пункт передатчика поднимется вверх (см. рисунок).



Через неделю после затмения, перед Новым Годом, обе либрации достигнут максимума (около  $7^\circ$ ). При наблюдении с Земли оба смещения (по широте и долготе) составят  $r \cdot \sin 7^\circ = 1.9'$ . Здесь  $r$  – угловой радиус Луны, который в данный момент будет близок к своему среднему значению ( $15.5'$ ). Полная величина углового смещения передатчика составит  $2.7'$ .

## Часть 4. Дополнительные задачи

### *Видимое движение небесных тел*

4.1. Звездные сутки, равные периоду вращения Земли относительно неподвижных звезд, чуть короче солнечных и равны примерно 23 часа 56 минут. Поэтому данная звезда за эти сутки успеет зайти за горизонт и вновь взойти в 23 часа 57 минут по местному времени, то есть пересечет горизонт еще дважды (если, конечно, за оставшиеся три минуты звезда не зайдет обратно за горизонт).

4.2. Угловая скорость годичного движения Солнца вдоль эклиптики равна

$$\omega = (360/365.25) = 0.986^\circ/\text{сутки}.$$

Вблизи весеннего равноденствия, когда Солнце восходит на Северном полюсе, эта скорость будет иметь вертикальную компоненту, равную

$$\omega_v = \omega \sin \varepsilon = 0.393^\circ/\text{сутки}.$$

Здесь  $\varepsilon$  – угол наклона экватора к эклиптике, равный  $23.5^\circ$ . Учитывая, что угловой диаметр Солнца в день весеннего равноденствия составляет  $32'$  или  $0.53^\circ$ , получается, что восход Солнца на Северном полюсе растянется на 1.357 суток, или 1 день и 8.6 часов.

Луна будет восходить гораздо быстрее. Ее средняя угловая скорость равна

$$\Omega = (360/27.32) = 13.177^\circ/\text{сутки},$$

и если пренебречь наклоном ее орбиты к эклиптике, то вертикальная проекция угловой скорости составит

$$\Omega_v = \Omega \sin \varepsilon = 5.254^\circ/\text{сутки},$$

и при среднем угловом диаметре  $31'$  восход продлится 2.36 часа, что по “полярным меркам” очень немного.

4.3. Гражданские сумерки продолжаются от захода Солнца до его погружения на глубину  $6^\circ$  или, наоборот, от момента погружения Солнца на данную глубину до его восхода. Очевидно, что гражданские сумерки будут тем короче, чем быстрее Солнце меняет свою глубину погружения в это время. Зенитное расстояние Солнца быстрее всего меняется, когда Солнце находится на востоке и западе. Это время попадает на гражданские сумерки в северном полушарии перед весенним равноденствием или после осеннего равноденствия.

4.4. Меркурий находится в восточной элонгации, значит, он может быть найден ранним вечером сразу после захода Солнца. Очевидно, что при фиксированном угловом расстоянии от Солнца его проще будет найти там, где он будет находиться точно над зашедшем светилом, то есть в том месте, где эклиптика перпендикулярна горизонту и проходит через зенит.

Так как дело происходит вечером во второй половине марта, то заходящее Солнце находится вблизи точки весеннего равноденствия рядом с горизонтом. Тогда в зените будет точка летнего солнцестояния, отстоящая от него на  $90^\circ$  к востоку, то есть это будет северный тропик с широтой  $\varphi = +23.5^\circ$ . Именно на этой широте будет легче всего увидеть Меркурий.

4.5. Это может произойти в том месте, где в какой-то момент по звездному времени эклиптика совпадает с горизонтом. Тогда Солнце окажется на горизонте независимо от сезона года. Соответственно, в зените в это время должен оказаться северный ( $\alpha = 18\text{ч}$ ,  $\delta = +66.5^\circ$ ) или южный

( $\alpha = 06^{\text{ч}}$ ,  $\delta = -66.5^{\circ}$ ) полюс эклиптики. Следовательно, такая картина могла наблюдаться на северном полярном круге при звездном времени 18 часов или на южном полярном круге при звездном времени 6 часов.

4.6. Скорость суточного движения Земли направлена с запада на восток и равна

$$v_0 = \frac{2\pi R \cos\varphi}{T_0}.$$

Здесь  $R$  – радиус Земли,  $T_0$  – период ее вращения вокруг своей оси. На широте  $\varphi = 60^{\circ}$  эта скорость составляет 835 км/ч. Движение пассажира поезда вокруг оси Земли будет происходить на 60 км/ч быстрее, и его скорость  $v$  составит 895 км/ч, что уменьшит продолжительность солнечных суток до

$$T = \frac{2\pi R \cos\varphi}{v},$$

то есть до 22.39 часов. В день весеннего равноденствия световой день будет длиться ровно половину солнечных суток (если не учитывать рефракцию), то есть для пассажира поезда он составит 11.195 часов или 11 часов 12 минут.

4.7. Как ни странно, такое может быть! Мало того, такая ситуация практически реализуется на одной из планет Солнечной системы, на Уране, ось вращения которого образует очень малый угол с плоскостью орбиты. Представьте себя на экваторе планеты, у которой видимый путь центральной звезды среди звезд (аналог эклиптики) проходит через местные полюса. Тогда дважды в году, во время равноденствий, местное Солнце будет кульминировать в зените, и это будет самое теплое время в Вашей точке планеты, хотя день будет в точности равен ночи. А во время солнцестояний дневное светило будет постоянно находиться на северном или южном горизонте. Все время будет светло, но это будут два самых холодных сезона в году.

### *Атмосферы Земли и планет*

4.8. Если бы у Земли не было атмосферы, в моменты обоих равноденствий на северном полюсе центр диска Солнца находился бы точно на горизонте. В действительности Солнце находится выше благодаря атмосферной рефракции – преломлению лучей света при входе во все более плотные слои атмосферы. Величина рефракции зависит от атмосферных условий, увеличиваясь с плотностью воздуха, которая, в свою очередь, при постоянном атмосферном давлении растет с падением температуры. Во время весеннего равноденствия на северном полюсе холоднее, и при равном давлении Солнце будет видно чуть выше, чем в осеннее равноденствие.

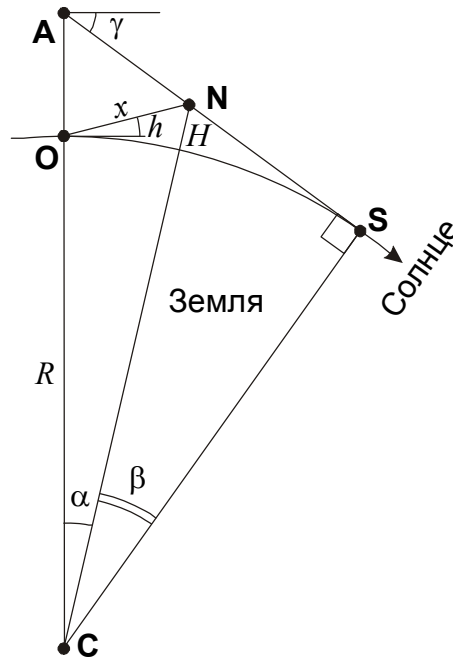
4.9. Явление мерцания связано с неоднородностями земной атмосферы, через которые проходит свет от небесных объектов. Хаотично двигаясь в атмосфере, преломляя и поглощая свет по-иному, нежели соседние области, они вызывают кратковременные дрожания и изменения яркости светил. Угловые размеры неоднородностей малы, но больше видимых размеров звезд, и мы наблюдаем их мерцание. Излучение планет, имеющих значительный угловой диаметр, проходит сразу через несколько подобных ячеек, и искажения, вносимые каждой из них, в среднем компенсируют друг друга. Поэтому планеты мерцают значительно слабее звезд.

Если проводить наблюдения звезд в телескоп, объектив которого значительно больше человеческого глаза, то разные участки объектива будут принимать излучение звезд, проходящее через разные ячейки атмосферы. Их действие также компенсируется, и звезды при наблюдении в телескоп практически не мерцают. Тем более, при наблюдении в телескоп не мерцают планеты.

4.10. Серебристые облака – самые высокие облака на Земле, образующиеся в области последнего температурного минимума в мезосфере (в летние месяцы температура там уменьшается до  $-90^{\circ}\text{C}$ ).



Будем считать, что серебристые облака видны всегда, когда они освещаются Солнцем (на самом деле поглощение в атмосфере вносит дополнительные ограничения). На рисунке изображена предельная ситуация, когда облака, находящиеся в точке **N**, освещаются касательными лучами Солнца. Наблюдатель находится в точке **O**.



Из прямоугольного треугольника **ASC** видно, что глубина погружения Солнца под горизонт  $\gamma$  в точке **O** равна сумме геоцентрических углов  $\alpha$  и  $\beta$ . Для треугольника **ONC** можно записать выражения теорем косинусов и синусов:

$$x^2 = R^2 + (R + H)^2 - 2R(R + H) \cos \alpha,$$

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{R + H}{\sin(90^\circ + h)} = \frac{R + H}{\cos h}.$$

Здесь  $R$  – радиус Земли,  $H$  – высота серебристых облаков,  $h$  – их угловая высота над горизонтом. Возводя в квадрат второе уравнение и заменяя  $\sin^2 \alpha$  на  $(1 - \cos^2 \alpha)$ , получаем квадратное уравнение относительно косинуса угла  $\alpha$ :

$$\frac{(R + H)^2}{\cos^2 h} \cos^2 \alpha - 2R(R + H) \cos \alpha + R^2 + (R + H)^2 - \frac{(R + H)^2}{\cos^2 h} = 0.$$

После преобразований свободного члена уравнения получаем выражение для дискриминанта:

$$D = 4(R + H)^2 \operatorname{tg}^2 h \left( \frac{(R + H)^2}{\cos^2 h} - R^2 \right).$$

Уравнение имеет два решения:

$$\alpha = \arccos \frac{R \cos^2 h \pm \sqrt{(R + H)^2 \sin^2 h - R \sin^2 h \cos^2 h}}{R + H}.$$

Физический смысл имеет решение со знаком «+», второе решение соответствует продолжению отрезка **NO** под горизонт с последующим выходом в атмосферу Земли. Подставляя численные значения, получаем, что угол  $\alpha$  равен  $3.6^\circ$ . Угол  $\beta$  рассчитывается значительно проще:

$$\beta = \arccos \frac{R}{R+H} = 9.2^\circ.$$

В итоге, серебристые облака остаются видимыми на данной высоте над горизонтом, пока погружение Солнца под горизонт не достигнет  $12.8^\circ$ . На широте Москвы ( $+55.7^\circ$ ) Солнце не опускается глубже данного уровня, если его склонение превышает  $+21.5^\circ$ , то есть с последних дней мая до середины июля.

4.11. В адиабатической атмосфере отсутствует обмен тепла между различными ее частями. Так, для одного моля газа с объемом  $V$  уравнение теплового баланса будет выглядеть следующим образом:

$$P\Delta V = -\frac{i}{2}R\Delta T.$$

Здесь  $P$  – давление,  $T$  – температура,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $i$  – число механических степеней свободы молекулы. Если газ поднимается вверх, он расширяется и совершает работу, но при этом охлаждается, в итоге не передавая тепло окружающей атмосфере. Поэтому в адиабатических условиях температура уменьшается с высотой.

По условию задачи атмосфера сухая, и можно считать, что она состоит из идеального газа. В этом случае изменения давления, объема и температуры одного моля газа связаны соотношением:

$$\Delta PV + P\Delta V = R\Delta T.$$

Изменение давления  $\Delta P$  связано с изменением высоты  $\Delta h$ :

$$\Delta P = -\rho g\Delta h.$$

Здесь  $\rho$  – плотность газа,  $g$  – ускорение свободного падения. Подставляя эту связь в уравнение идеального газа, выражая изменение объема  $\Delta V$  из адиабатического уравнения, получаем:

$$\frac{i+2}{2}R\Delta T = -\rho gV\Delta h.$$

Произведение плотности и молярного объема есть молярная масса газа  $\mu$ . В результате мы приходим к выражению для сухого адиабатического градиента температуры:

$$\frac{\Delta T}{\Delta h} = -\frac{2}{i+2} \frac{\mu g}{R}.$$

Высота сухой адиабатической атмосферы – это высота, на которой температура такой атмосферы обращается в ноль:

$$H_A = -\frac{T_0}{(\Delta T/\Delta h)} = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{RT_0}{\mu g}.$$

Здесь  $T_0$  – температура атмосферы у поверхности планеты.

Рассчитаем сначала высоту адиабатической атмосферы для Земли. Ускорение свободного падения на Земле равно  $9.81 \text{ м/с}^2$ , молярная масса –  $0.029 \text{ кг/моль}$ . Атмосфера состоит в основном

из двухатомных молекул, для которых  $i=5$ . Сухой адиабатический градиент температуры получается равным  $-0.0098$  К/м. Температура у поверхности Земли составляет в среднем  $290$  К, и высота адиабатической атмосферы равна  $29.6$  км.

Атмосферы Венеры и Марса состоят в основном из углекислого газа, молярная масса равна  $0.044$  кг/моль, а число  $i$  близко к  $6$ . Ускорение свободного падения у поверхности Венеры равно  $8.87$  м/с<sup>2</sup>, температура составляет  $700$  К. Адиабатический градиент получается равным  $-0.012$  К/м, а высота сухой адиабатической атмосферы – около  $60$  км. Для Марса, при ускорении свободного падения  $3.71$  м/с<sup>2</sup> и температуре поверхности  $220$  К получаем величину градиента  $-0.005$  К/м и высоту сухой адиабатической атмосферы  $45$  км.

Разумеется, атмосферы планет не являются адиабатическими. Полученные величины фактически являются ограничениями на высоту тропосфер планет, где наблюдаются похожие условия – температура уменьшается с высотой.

4.12. Из-за высокой плотности атмосферы Венеры там наблюдается очень сильный “парниковый эффект”, препятствующий отходу тепла от планеты, из-за чего ее поверхность разогрета до  $400-500^\circ\text{C}$ . При такой огромной температуре жизнь существовать не может. Но благодаря той же плотной облачной атмосфере планета Венера выглядит такой яркой на нашем земном небе. Жизнь на Венере была бы возможна, если бы ее атмосфера была более разрежена, а поверхность не была бы окутана таким плотным слоем облаков. Но на нашем небе Венера в этом случае предстала бы более слабым объектом.

На холодном Марсе ситуация совершенно обратная. Атмосфера этой планеты крайне разрежена, жидкой воды на Марсе не найдено. Прозрачность атмосферы для инфракрасного излучения способствуют охлаждению планеты. В случае наличия плотной атмосферы и воды (что, как полагают, могло когда-то иметь место на Марсе) на нем была бы возможна жизнь, а блеск Марса на нашем небе был бы значительно выше.

### *Движение Луны, покрытия и затмения*

4.13. При покрытии далекой звезды Луной область видимости этого явления (назовем ее тенью) движется в пространстве со скоростью, равной скорости орбитального движения Луны, которая минимальна, когда Луна достигает точки апогея своей орбиты. Величину скорости Луны в апогее можно получить из формулы, вытекающей из II закона Кеплера с учетом малости эксцентриситета ее орбиты:

$$v = \frac{\sqrt{GMa}}{r}.$$

Здесь  $M$  – масса Земли,  $a$  – большая полуось орбиты Луны,  $r$  – расстояние от Земли в апогее. Подставляя численные значения, получаем значение минимальной скорости Луны:  $0.962$  км/с. Однако нужно еще учесть, что Земля также вращается вокруг своей оси с периодом около  $23$  часа  $56$  минут, и точка, находящаяся на экваторе Земли, движется со скоростью  $0.465$  км/с. Если эти две скорости окажутся сонаправленными, то скорость лунной тени относительно наблюдателя может уменьшиться до  $0.497$  км/с. Звезда находится от нас несравнимо дальше, чем Луна, и выглядит точкой, а диаметр тени равен диаметру Луны ( $3476$  км). Следовательно, максимальная продолжительность покрытия звезды Луной составит около  $1$  часа и  $56.5$  минут.

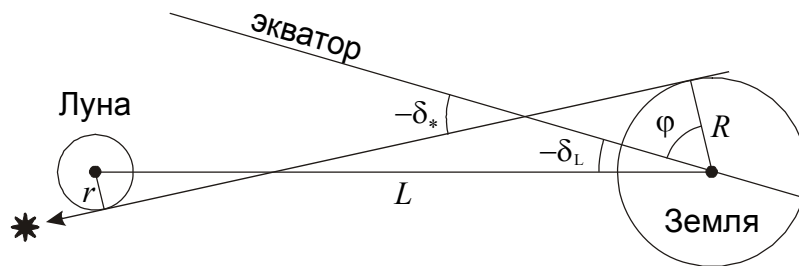
4.14. Момент покрытия Луной звезды с минимальным склонением изображен на рисунке. С учетом небольших размеров Земли и Луны по сравнению с расстоянием между ними склонение звезды равно

$$\delta_* = \delta_L - \frac{R+r}{L}.$$

Здесь  $R$  и  $r$  – радиусы Земли и Луны (для Земли правильной взять полярный радиус), а  $L$  – расстояние между ними. Для того, чтобы склонение звезды было минимальным, склонение Луны и расстояние между Землей и Луной должны также достигнуть минимума. Минимальное геоцентрическое склонение Луны составляет

$$(\delta_L)_{\min} = -\varepsilon - i = -28.6^\circ$$

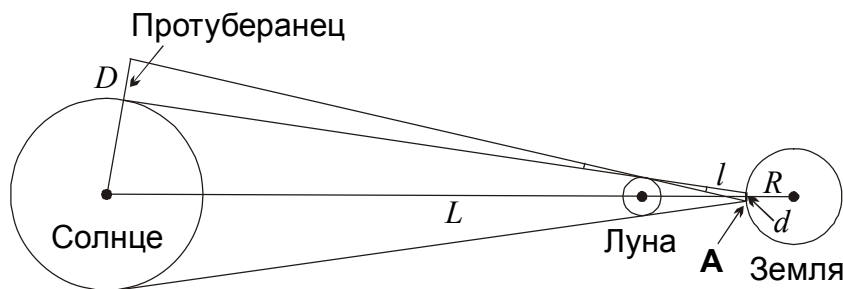
и достигается раз в 18.6 лет ( $\varepsilon$  и  $i$  – углы наклона экватора Земли и лунной орбиты к эклиптике). Минимальное расстояние Луны от Земли составляет 356 тыс. км. В итоге, минимальное склонение звезды оказывается равным  $-29.9^\circ$ .



Как видно на рисунке, во время покрытия звезда будет находиться на южном горизонте и заденет нижний край Луны. Следовательно, это будет происходить в северном полушарии на широте  $60.1^\circ$ . Однако, если учесть рефракцию, составляющую у горизонта  $0.6^\circ$ , покрытие будет видно на широте  $60.7^\circ$ .

4.15. В условии задачи сказано, что полное солнечное затмение наблюдается вблизи зенита. В этом случае можно считать, что центры Солнца, Луны и Земли находятся на одной линии, а ширина полосы полной фазы равна диаметру пятна лунной тени, бегущего по поверхности Земли. Обозначим его через  $d$ , расстояния от центра Земли до Солнца и Луны через  $L$  и  $l$  соответственно, а радиус Земли – через  $R$ . Из рисунка видно, что протуберанец будет виден из всей области тени, если он виден из самой удаленной ее точки А. Из равенства вертикальных углов, отмеченных на рисунке, получаем, что размер протуберанца должен быть не меньше величины  $D$ , для которой

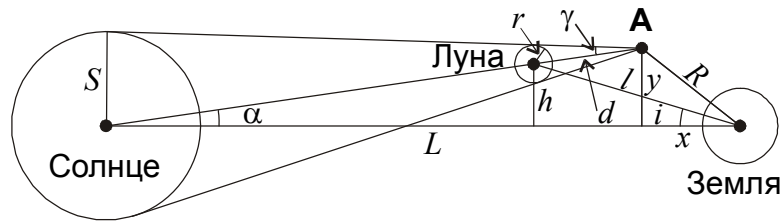
$$\frac{D}{L-l} = \frac{d}{l-R}$$



Подставляя численные значения, получаем размер протуберанца, равный 59200 км, что почти впятеро превышает диаметр Земли! Тем не менее, солнечные протуберанцы часто наблюдаются в течение всей полной фазы солнечного затмения, что указывает на огромные размеры этих образований.

4.16. На самой поверхности Земли полные солнечные затмения не наблюдаются в каждое новолуние по двум причинам. Во-первых, из-за наклона орбиты Луны к эклиптике лунная тень чаще всего проходит выше или ниже Земли, и, во-вторых, даже когда центральное затмение происходит, оно может быть кольцеобразным, и тень Луны не доходит до поверхности Земли.

Рассмотрим наименее благоприятное для затмения новолуние (см. рисунок): Луна находится на максимальном расстоянии от Земли и от плоскости эклиптики, система Земля-Луна находится на минимальном расстоянии от Солнца, поэтому длина лунной тени также минимальна.



Угол наклона лунной орбиты к эклиптике  $i$  невелик, поэтому расстояние Луны от плоскости эклиптики  $h$  с хорошей точностью равно  $il$ , где  $l$  – расстояние Луны от Земли, а величина  $i$  выражена в радианах. Угол наклона оси лунной тени к плоскости эклиптики равен

$$\alpha = \frac{h}{L-l} = \frac{il}{L-l}.$$

Здесь  $L$  – расстояние от Земли до Солнца. Обозначая радиусы Солнца и Луны через  $S$  и  $r$ , запишем выражение для половинного угла раствора конуса тени:

$$\gamma = \frac{S-r}{L-l}.$$

Длина лунной тени от центра Луны до точки **A** равна

$$d = \frac{r}{\gamma} = \frac{r(L-l)}{S-r}.$$

Точка **A** будет отстоять от плоскости эклиптики на расстоянии  $y$ :

$$y = (L-l+d)\alpha = \frac{(L-l)S\alpha}{S-r} = \frac{lSi}{S-r},$$

а ее проекция на плоскость эклиптики будет находиться на расстоянии  $x$  от центра Земли:

$$x = l-d = \frac{Sl-rL}{S-r}.$$

В этой формуле была учтена малость угла  $\alpha$ . Подставляя значение  $L$ , равное 147.1 млн. км и  $l$ , равное 406700 км, мы получаем весьма близкие друг к другу значения  $x$  и  $y$ : 38.94 и 36.65 тыс. км соответственно. Искомый радиус сферы  $R$ , с которой даже в это новолуние удастся увидеть полное солнечное затмение, равен

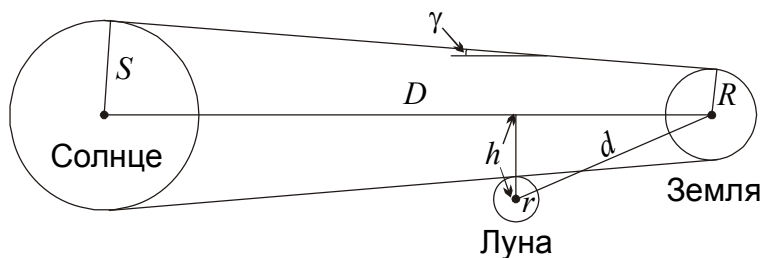
$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

и составляет 53.47 тыс. км, что более чем в 8 раз превышает радиус Земли.

4.17. Полное солнечное затмение с максимально возможной продолжительностью (до 7.5 минут) может наблюдаться, когда Земля находится в афелии, и угловой диаметр Солнца минимальный, то есть, в первой половине июля. Продолжительность полной фазы тем больше, чем ближе мы находимся к Луне, то есть чем выше Луна находится над горизонтом. В начале июля склонение Солнца составляет  $22^\circ$ - $23^\circ$ , и именно на этих широтах в северном полушарии Солнце и Луна во

время затмения могут оказаться в зените. С другой стороны, продолжительность полной фазы увеличивается к экватору, где больше скорость наблюдателя за счет вращения Земли, направленная в ту же сторону, что и скорость лунной тени, и частично компенсирующая эту скорость. Наложение обоих факторов приводит к тому, что самые продолжительные полные солнечные затмения наблюдаются примерно посередине между экватором и северным тропиком (точнее, на широте  $9^\circ-10^\circ$ ) и видны на высоте около  $76^\circ-78^\circ$  над северным горизонтом.

4.18. Для решения задачи нужно сначала определить, на каком угловом расстоянии от узла лунной орбиты может произойти частное солнечное затмение. Рассмотрим предельную ситуацию, когда полутень Луны касается Земли (см. рисунок). Эта ситуация будет близка к той, что случится 1 июля 2011 года.



Обозначим через  $S$ ,  $R$  и  $r$  радиусы Солнца, Земли и Луны (для Земли нужно взять полярный радиус), а через  $D$  и  $d$  – расстояния от Земли до Солнца и Луны. Угол раствора конуса, касающегося Солнца и Земли, равен

$$\gamma = \frac{S - R}{D},$$

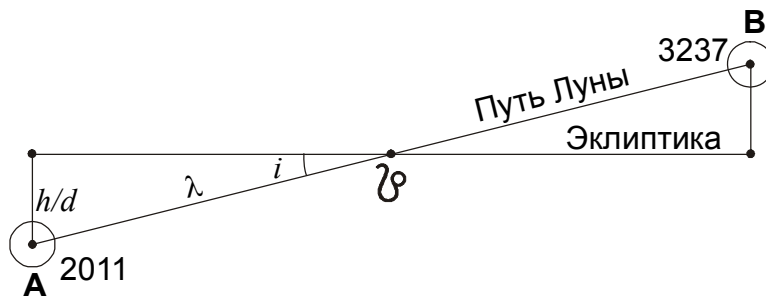
а расстояние от центра Луны до плоскости эклиптики

$$h = r + R + d\gamma = \frac{rD + Sd + R(D - d)}{D}.$$

Здесь мы учли, что размеры Луны и Солнца значительно меньше расстояний до них. Лунная орбита наклонена к плоскости эклиптики на угол  $i$ , равный  $5.15^\circ$ . Расстояние Луны от узла орбиты в данном случае будет равно

$$\lambda = \frac{h}{d \sin i} = \frac{rD + Sd + R(D - d)}{Dd \sin i},$$

что при средних расстояниях до Солнца и Луны составляет 0.286 рад или  $16.38^\circ$ .



Сарос, равный по определению 223 синодическим периодам обращения Луны, составляет около 6585.321 суток (18 лет и 10 дней) или 241.99867 драконических периода обращения Луны. Получается, что по прошествии сароса Луна не успеет завершить 242-й оборот относительно узлов своей орбиты, для этого ей нужно будет пройти по ней еще  $\Delta\lambda = 0.478^\circ$ . Из этого следует,

что первое затмение новой серии должно произойти уже после прохождения Луной узла. Так как затмение 1 июля 2011 года будет видно в южном полушарии Земли, Луна будет находиться южнее плоскости эклиптики, пройдя за сутки с небольшим до этого нисходящий узел орбиты (положение **A** на рисунке).

Каждое следующее затмение будет происходить все ближе к точке узла, и фаза затмения будет увеличиваться. Через какое-то время затмения будут происходить уже до прохождения узла, будут лучше видны в северном полушарии, а их фаза пойдет на убыль. Наконец, последнее затмение серии наступит вблизи положения **B**, его фаза, видимая на северных полярных широтах, будет очень маленькой. Чтобы определить, через сколько саросов это произойдет, разделим удвоенный угол  $\lambda$  (угловое расстояние между точками **A** и **B**) на величину  $\Delta\lambda$  и у получившегося числа возьмем целую часть, равную 68.

Умножая продолжительность сароса на 68, получаем среднее время действия последовательности затмений – 1226.04 календарных лет. Действительно, серия, начавшаяся 1 июля 2011 года, завершится частным солнечным затмением 14 июля 3237 года, 69-м по счету в данной серии, видимым в России в Магаданской области и на Чукотском полуострове. Вообще говоря, число солнечных затмений в одной серии может отличаться от 69, если расстояния до Солнца и Луны во время этих затмений будут существенно отличаться от средних значений.

4.19. В настоящее время Земля обращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\Omega$ , значительно превосходящей угловую скорость вращения Луны вокруг Земли и вокруг своей оси  $\omega$ . За счет приливного трения Земля постепенно отдает момент вращения Луне, и радиус орбиты нашего спутника медленно увеличивается. Рассмотрим случай, при котором угловые скорости всех трех процессов (вращения Земли и Луны вокруг своих осей и Луны вокруг Земли) сравниваются, и обозначим эту величину через  $\psi$ . Мы не учитываем вращение Земли вокруг центра масс системы Земля-Луна, так как его момент есть небольшой и постоянный (1/81) вклад в момент вращения Луны вокруг Земли.

Запишем уравнение сохранения момента импульса системы Земля-Луна:

$$\frac{2}{5}MR^2\Omega + \frac{2}{5}mr^2\omega + ml^2\omega = \left(\frac{2}{5}MR^2 + \frac{2}{5}mr^2 + md^2\right)\psi.$$

Здесь  $M$  и  $R$  – масса и радиус Земли,  $m$  и  $r$  – масса и радиус Луны,  $l$  и  $d$  – радиусы лунной орбиты в настоящее время и в эпоху синхронного вращения. Эти две величины связаны друг с другом по III закону Кеплера:

$$\frac{d^3}{l^3} = \frac{\omega^2}{\psi^2}.$$

Выражая  $d$  через  $l$  и подставляя его в уравнение сохранения момента импульса, получаем:

$$\frac{2}{5}MR^2\Omega + \frac{2}{5}mr^2\omega + ml^2\omega = \frac{2}{5}(MR^2 + mr^2)\psi + ml^2\omega^{4/3}\psi^{-1/3}.$$

Мы получили уравнение 4-го порядка относительно величины  $\psi^{1/3}$ . Однако его можно существенно упростить, если принять, что весь момент импульса системы Земля-Луна сейчас содержится во вращении Земли вокруг своей оси и вращении Луны вокруг Земли, а в эпоху синхронного вращения – только в орбитальном вращении Луны. Вклад осевого вращения Луны сейчас и обоих тел в будущем очень мал. В этом случае уравнение принимает вид:

$$\frac{2}{5}MR^2\Omega + ml^2\omega = ml^2\omega^{4/3}\psi^{-1/3}.$$

Из этого уравнения мы можем сразу получить угловую скорость синхронного вращения:

$$\psi = \frac{m^3 l^6 \omega^4}{\left(\frac{2}{5} MR^2 \Omega + ml^2 \omega\right)^3}.$$

Величина  $\psi$  оказывается равной  $0.5186 \omega$ , то есть орбитальный период Луны (а также продолжительность звездных суток на Земле) составит 52.68 нынешних суток. Радиус орбиты Луны окажется равным

$$d = \frac{\left(\frac{2}{5} MR^2 \Omega + ml^2 \omega\right)^2}{m^2 l^3 \omega^2} \approx 595000 \text{ км.}$$

Полученные значения очень близки к точным решениям записанного выше уравнения 4-й степени (52.08 суток и 589900 км), что оправдывает наши предположения. Однако на самом деле Земля и Луна не являются однородными шарами, их момент инерции несколько меньше, чем мы предположили. Реальный период синхронного вращения системы Земля-Луна составляет около 47 суток, а радиус орбиты Луны – примерно 550 тысяч километров.

### *Движение искусственных спутников и космических аппаратов*

4.20. Как известно, искусственный спутник Земли может постоянно находиться в зените только на экваторе, если этот спутник – геостационарный. Для того чтобы спутник мог оказаться в зените на московском небе, наклонение его орбиты к плоскости экватора должно быть не меньше широты Москвы  $\varphi$  ( $+55.7^\circ$ ), а лучше – в точности совпадать с ним. В этом случае склонение спутника будет близко к данной величине в течение продолжительного времени. Чтобы спутник, оказавшись в зените в Москве, вновь попал туда в свой следующий оборот, его период  $T$  должен быть кратным звездным суткам (23ч56м). Максимальное время вблизи зенита спутник проведет в случае равенства его периода обращения и звездных суток. По обобщенному III закону Кеплера большая полуось орбиты спутника будет равна

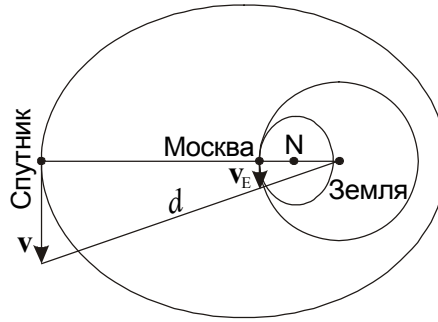
$$a = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3},$$

что фактически есть радиус геостационарной орбиты – 42.16 тысяч километров. Однако, вариант круговой орбиты, отличающейся от геостационарной лишь своим наклоном, не является оптимальным. Для того чтобы спутник на какое-то время практически останавливался на московском небе в зените, нужно, чтобы в этот момент его угловая скорость сравнивалась с геоцентрической угловой скоростью московских наблюдателей на вращающейся Земле (см. рисунок). Данная угловая скорость равна

$$\omega = \frac{v_E}{R} = \frac{2\pi \cos\varphi}{T},$$

что отличается от угловой скорости вращения геостационарного спутника множителем  $\cos\varphi$ . Поэтому для выполнения условия задачи спутник нужно вывести на эллиптическую орбиту с большой полуосью  $a$  и наклоном  $\varphi$ , точка апогея которой находилась бы над московской параллелью.





Теперь найдем эксцентриситет орбиты  $e$ . В точке апогея спутник находится на расстоянии  $d$  от центра Земли:

$$d = a(1 + e).$$

Из II закона Кеплера и закона сохранения энергии можно получить формулу для скорости спутника в апогее:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{a} \cdot \frac{1 - e}{1 + e}}.$$

Скорость в апогее направлена перпендикулярно радиусу-вектору. Угловая скорость спутника будет равна

$$\omega = \frac{v}{d} = \sqrt{\frac{GM}{a^3} \cdot \frac{1 - e}{(1 + e)^3}}.$$

Приравнивая ее к угловой скорости наблюдателей в Москве, получаем

$$\frac{1 - e}{(1 + e)^3} = \cos^2 \varphi.$$

Получившееся кубическое уравнение можно решить численным подбором, а можно и аналитически, воспользовавшись формулами Тартальи-Кардано. Эксцентриситет орбиты спутника равен

$$e = \sqrt[3]{\sqrt{A^2 + (A/3)^3} + A} - \sqrt[3]{\sqrt{A^2 + (A/3)^3} - A} - 1 = 0.301,$$

где сделано обозначение:

$$A = \frac{1}{\cos^2 \varphi}.$$

Расстояние спутника от центра Земли в афелии составит 54.85 тыс.км, а от Москвы, когда он находится в зените – 48.48 тыс. км.

4.21. Вторая космическая скорость, необходимая для того, чтобы с расстояния  $R$ , равного 1 а.е. преодолеть притяжение Солнца с массой  $M$  и улететь за пределы Солнечной системы, равна

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

и составляет 42.1 км/с. Но Земля сама движется по орбите со скоростью

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}},$$

равной 29.8 км/с, и при запуске аппарата в направлении движения Земли его скорость относительно Земли  $u$  может быть равна

$$u = v - v_0 = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\frac{GM}{R}},$$

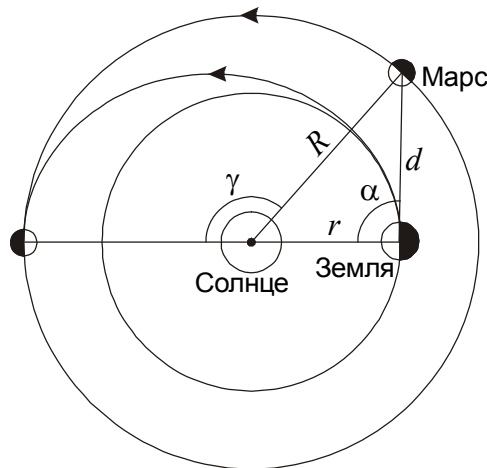
то есть всего 12.3 км/с. Но такой скоростью должна быть уже после преодоления земного притяжения. Для определения стартовой скорости воспользуемся законом сохранения энергии:

$$v_3 = \sqrt{u^2 + \frac{2Gm}{r}} = \sqrt{\frac{(3 - 2\sqrt{2})GM}{R} + \frac{2Gm}{r}}.$$

В результате, третья космическая скорость на Земле составляет 16.7 км/с (здесь  $m$  и  $r$  – масса и радиус Земли).

4.22. Обозначим радиусы орбит Земли и Марса через  $r$  и  $R$ , а их периоды обращения вокруг Солнца как  $t$  и  $T$ . Путь аппарата от Земли к Марсу представляет собой половину эллипса, касающегося орбит обеих планет. Большая полуось этого эллипса равна

$$a = \frac{r + R}{2}.$$



По III закону Кеплера время перелета от Земли к Марсу, равное половине орбитального периода для данной орбиты, равно

$$\tau = \frac{T}{2} \sqrt{\left(\frac{r + R}{2R}\right)^3},$$

что составляет 0.709 лет. За это время Марс сместится по своей орбите на угол

$$\gamma = 2\pi \frac{\tau}{T} = \pi \sqrt{\left(\frac{r + R}{2R}\right)^3},$$

что в градусной мере равно  $135.7^\circ$ . Этот угол – смежный по отношению к углу между радиус-векторами Земли и Марса в момент запуска аппарата. По теореме косинусов находим расстояние между Землей и Марсом в этот момент:

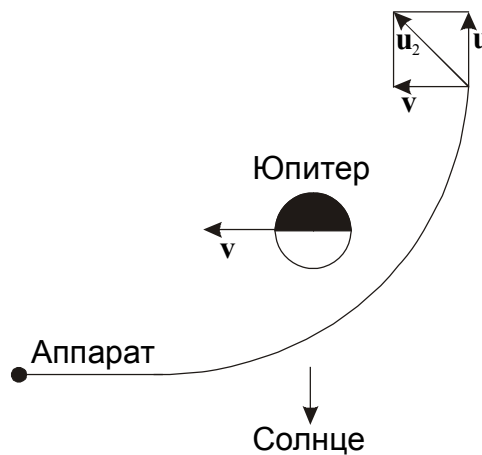
$$d = \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \cos \gamma} = 1.068 \text{ а.е.}$$

Обозначим угловое расстояние Марса от Солнца на Земле через  $\alpha$ . Вновь применяя теорему косинусов к этому треугольнику, получаем значение угла  $\alpha$ :

$$\alpha = \arccos \frac{r^2 + d^2 - R^2}{2rd} = 94.9^\circ.$$

В момент запуска Марс находится западней Солнца и уже прошел точку западной квадратуры.

4.23. На рисунке показана траектория космического аппарата вблизи Юпитера.



Величина скорости аппарата относительно Юпитера до и после сближения с ним по закону сохранения энергии должна быть одинаковой, меняется лишь ее направление. При этом скорость относительно Солнца меняется, в этом и заключается суть гравитационного маневра. Обозначим орбитальную скорость Юпитера через  $v$ , а скорость аппарата относительно Юпитера до и после маневра – через  $u$ . После маневра эти скорости перпендикулярны друг другу, поэтому скорость аппарата относительно Солнца составит

$$u_2 = \sqrt{v^2 + u^2}.$$

В то же время она будет равна второй космической скорости для данного расстояния от Солнца, то есть  $v\sqrt{2}$ , так как орбиту Юпитера можно считать круговой. Следовательно, величины  $u$  и  $v$  равны друг другу. Перед маневром аппарат подлетал к Юпитеру навстречу его движению по орбите и его скорость относительно Солнца была равна

$$u_1 = u - v = 0.$$

Получается, что аппарат был неподвижен относительно Солнца, и вполне бы мог впоследствии упасть на него, если бы подоспевший вовремя Юпитер своим гравитационным воздействием не выбросил аппарат из Солнечной системы!

Подобный маневр вблизи Юпитера возможен благодаря тому, скорость аппарата, равная орбитальной скорости планеты  $v$  и составляющая 13.1 км/с, значительно меньше второй космической скорости у поверхности планеты (59.5 км/с). При правильном выборе траектории можно добиться нужного изменения направления скорости. У Земли вторая космическая скорость

почти в три раза меньше орбитальной, и ее гравитационное поле не сможет так сильно повлиять на траекторию аппарата, как близко к ее поверхности он бы не подошел.

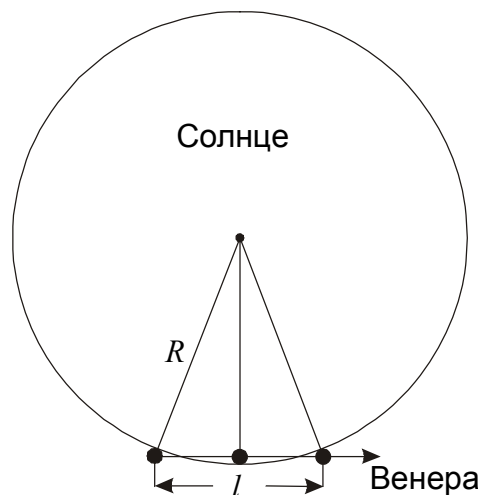
### Конфигурации и видимость планет

4.24. Максимальное угловое расстояние Меркурия от Солнца составляет  $28^\circ$ . Поэтому если Солнце находится на глубине не менее  $6^\circ$  под горизонтом, то Меркурий не может находиться на небе выше  $22^\circ$  (данное значение достигается, если линия Солнце-Меркурий перпендикулярна горизонту). Необходимо отметить, что угловое расстояние Меркурия от Солнца может достичь  $28^\circ$  только во время наибольшей восточной элонгации вблизи осеннего равноденствия и наибольшей западной элонгации вблизи весеннего равноденствия. В обоих случаях Меркурий будет находиться над Солнцем в районе южного тропика, где в это время эклиптика располагается перпендикулярно горизонту.

Однако Меркурий можно найти значительно выше (в пределе – в зените) во время полного солнечного затмения.

4.25. Если пренебречь наклоном орбиты Венеры к эклиптике (что в большинстве случаев можно делать для любой конфигурации этой планеты, кроме нижнего соединения), то в день наибольшей восточной элонгации Венеры она должна будет находиться на эклиптике в  $47^\circ$  от Солнца, то есть опережая его в видимом движении на полтора месяца. Получается, что Венера окажется вблизи точки летнего солнцестояния, и ее нижняя кульминация в точке севера произойдет на северном полярном круге (широта  $66.5^\circ$ ). Звездное время в этот момент составит 18 часов, и эклиптика будет совпадать с горизонтом. Солнце, находящееся на эклиптике в  $47^\circ$  правее Венеры (при наблюдении из северного полушария), будет восходить над горизонтом на северо-востоке.

4.26. Наиболее продолжительное частное прохождение Венеры по диску Солнца будет наблюдаться в случае касания дисков планеты и дневного светила так, как показано на рисунке.



Если обозначить видимые радиусы Солнца и Венеры как  $R$  и  $r$ , то угловой размер пути, который Венера пройдет по диску Солнца, составит

$$l = 2\sqrt{(R + r)^2 - (R - r)^2} = 4\sqrt{Rr}.$$

Для средних значений угловых диаметров Солнца и Венеры этот путь составляет  $0.189^\circ$ . Для решения задачи нужно знать угловую скорость движения Венеры по диску Солнца. Эта скорость является наложением угловых скоростей движения Венеры и Солнца по небу, которые во время прохождения направлены в противоположные стороны. Угловая скорость Солнца равна

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Здесь  $T$  – период обращения Земли по орбите. Угловая скорость Венеры относительно Земли имеет отрицательный знак (Венера движется попятно) и составляет

$$\omega_V = -\frac{v_V - v_E}{d_E - d_V}.$$

Здесь  $v_V$  и  $v_E$  – пространственные скорости Венеры и Земли, а  $d_V$  и  $d_E$  – их расстояния от Солнца. По III закону Кеплера

$$\frac{v_V^2}{v_E^2} = \frac{d_E}{d_V}.$$

Обозначая отношение  $d_V/d_E$  через  $a$  (это есть радиус орбиты Венеры в астрономических единицах), получаем

$$\omega_V = -\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\sqrt{1/a} - 1}{1 - a}.$$

В итоге, угловая скорость Венеры относительно Солнца составляет

$$\omega = \omega_V - \omega_0 = -\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\sqrt{1/a} - a}{1 - a}.$$

По модулю это соответствует  $1.612^\circ/\text{сутки}$ . Выходит, что максимальная продолжительность частной фазы прохождения Венеры по диску Солнца составляет  $0.117$  суток или  $2.81$  часа.

4.27. Вблизи противостояния внешней планеты, когда ее скорость и скорость Земли оказываются почти сонаправленными, планета начинает двигаться среди звезд в обратном направлении, с востока на запад, за счет того, что ее скорость по модулю меньше скорости Земли. Однако, если бы орбита Марса была более вытянутой, чем это имеет место на самом деле, его орбитальная скорость в перигелии могла бы стать больше орбитальной скорости Земли. И если в этот же момент планета Марс оказалась бы в противостоянии (разумеется, в великом), то она не описывала бы петлю среди звезд, а продолжала бы двигаться в прямом направлении.

Пусть  $a$  – большая полуось орбиты Марса, а  $e$  – ее эксцентриситет. Тогда перигелийное и афелийное расстояния Марса будут равны

$$R_P = a(1 - e); \quad R_A = a(1 + e),$$

и для этих двух точек орбиты можно записать законы сохранения момента импульса и энергии:

$$R_A v_A = R_P v_P;$$

$$\frac{v_A^2}{2} - \frac{GM}{R_A} = \frac{v_P^2}{2} - \frac{GM}{R_P}.$$

Здесь  $v_P$  и  $v_A$  – перигелийная и афелийная скорости Марса, направленные по касательной к его орбите. Решая эти уравнения, можно получить выражение для скорости Марса в перигелии и приравнять ее к орбитальной скорости Земли, считая ее орбиту круговой:

$$v_P^2 = \frac{GM}{a} \frac{1+e}{1-e} = \frac{GM}{a_0}.$$

Здесь  $a_0$  — радиус орбиты Земли. Из последнего уравнения получаем эксцентриситет орбиты Марса:

$$e = \frac{a - a_0}{a + a_0} = 0.207.$$

При этом и большем значении эксцентриситета Марс не описывал бы петель среди звезд на земном небе во время великих противостояний. Нетрудно посчитать, что в это время Марс подходил бы к Земле на расстояние

$$d = a_0 \frac{a - a_0}{a + a_0} = 0.207 \text{ а.е.}$$

Зная, что во время великих противостояний Марс может подойти к Земле на расстояние  $d_0$ , равное 0.372 а.е, и его блеск при этом достигает  $-2.9^m$ , определяем блеск Марса в нашем гипотетическом противостоянии, вновь считая для простоты орбиту Земли круговой:

$$m = -2.9 + 5 \lg \frac{d(d + a_0)}{d_0(d_0 + a_0)} = -4.5.$$

Выходит, что ярко-красный Марс на земном небе в это время уступал по яркости только Солнцу и Луне, а Венера могла бы превзойти его в блеске, только находясь вблизи точки своей максимальной яркости. Это были бы воистину великие противостояния!

### *Спутники планет Солнечной системы*

4.28. Для того, чтобы оценить влияние солнечных возмущений на движение спутника, нужно сравнить силу притяжения планеты, действующую на спутник, не с притяжением Солнца, как это может показаться на первый взгляд, а с разностью сил притяжения Солнца в самом близком и самом удаленном от Солнца положении спутника. Обозначим массы Солнца и планеты через  $M$  и  $m$ , расстояние от Солнца до планеты через  $R$ , а от планеты до спутника — через  $r$ . Ускорение силы притяжения планеты, действующей на спутник, будет равно

$$g_1 = \frac{Gm}{r^2}.$$

Разность ускорений притяжения Солнца в самой близкой и самой далекой от Солнца точках составит

$$g_2 = \frac{GM}{(R - r)^2} - \frac{GM}{(R + r)^2}.$$

Так как расстояние  $R$  значительно больше, чем  $r$ , последнюю формулу можно переписать как

$$g_2 = \frac{4GMr}{R^3}.$$

В итоге, безразмерная величина солнечных возмущений равна

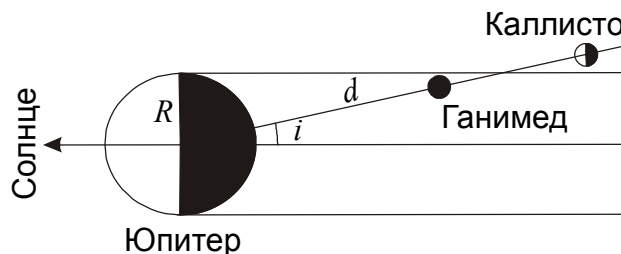
$$D = \frac{g_2}{g_1} = \frac{4Mr^3}{mR^3}.$$

У спутника Земли Луны и спутника Юпитера Ио радиусы орбит близки друг к другу (384.4 и 421.8 тыс. км соответственно), но Юпитер в 317.94 раза тяжелее Земли и 5.2028 раз дальше от Солнца. В итоге, влияние солнечных возмущений на движение Ио почти в 34000 раз меньше, чем на движение Луны.

4.29. Определим минимальный угол наклона плоскости орбиты спутника Юпитера к плоскости орбиты самого Юпитера, при котором спутник может миновать тень планеты, проходя за ней (см. рисунок). Этот угол составляет

$$i = \arcsin \frac{R}{d}.$$

Здесь  $R$  – полярный радиус Юпитера (равный 66770 км),  $d$  – радиус орбиты спутника (мы пренебрегаем размерами спутников по сравнению с размерами Юпитера).



Известно, что наклон орбит спутников меньше данного предельного значения для Ганимеда, но больше предельного значения для Каллисто. Подставляя в формулы радиусы орбит Ганимеда (1070400 км) и Каллисто (1882800 км), получаем, что наклон орбит спутников превышает  $2.0^\circ$ , но меньше  $3.6^\circ$ . В действительности этот угол составляет около  $3^\circ$ .

4.30. Данное полушарие Титана освещают два ярких светила – Солнце и Сатурн, причем Сатурн все время располагается в одной и той же области неба. Эта планета находится в 9.54 раза дальше от Солнца, чем Земля, и звездная величина Солнца из окрестностей Сатурна составляет

$$m_1 = -26.78 + 5 \lg 9.54 = -21.88.$$

В среднем противостоянии при среднем раскрытии кольца, находясь в 8.54 а.е. от Земли и имея полную фазу, Сатурн выглядит как звезда  $0.4^m$ . С Титана, находящегося на расстоянии 1221850 км или 0.0082 а.е., планета в виде полного диска с кольцом будет иметь блеск

$$m_2 = 0.4 + 5 \lg (0.0082/8.54) = -14.7.$$

Такой блеск у Сатурна будет ночью, когда Солнце находится под горизонтом. Угловой диаметр Сатурна составит  $5.7^\circ$ , но ночь все равно будет в 750 раз темнее дня (ночь и день будут длиться на Титане половину времени его оборота вокруг Сатурна, то есть почти по 8 земных дней). Однако самым темным временем на Титане будет середина дня в период, когда Сатурн оказывается на линии пересечения плоскостей орбит спутников и своей орбиты – такое случается дважды за период обращения Сатурна вокруг Солнца (около 30 лет). В это время на Титане наступит полное солнечное затмение, которое может продлиться до 6 часов!

### Малые тела Солнечной системы

4.31. Система из двух астероидов распадется, если разность сил притяжения Солнца, действующих на первый и второй астероид, станет сравнимой с взаимной силой притяжения астероидов. Математически это условие записывается следующим образом:

$$\frac{Gm^2}{d^2} = \frac{GMm}{\left(D - \frac{d}{2}\right)^2} - \frac{GMm}{\left(D + \frac{d}{2}\right)^2}.$$

Здесь  $M$  и  $m$  – массы Солнца и одного астероида, а  $D$  и  $d$  – расстояние от системы астероидов до Солнца и расстояние между астероидами соответственно. Так как величина  $D$  значительно больше, чем  $d$ , мы можем переписать условие как

$$\frac{Gm^2}{d^2} = \frac{2GMmd}{D^3}.$$

Из этого следует выражение для предельного расстояния между астероидами  $d$ :

$$d = D \left( \frac{m}{2M} \right)^{1/3} = DR \left( \frac{2\pi\rho}{3M} \right)^{1/3}.$$

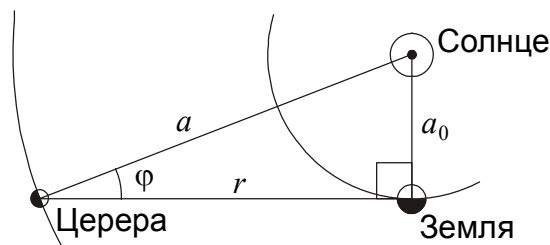
Здесь  $\rho$  и  $R$  – плотность и радиус каждого из астероидов. Подставляя численные значения, получаем величину предельного расстояния между астероидами 240000 км. Угловое расстояние между астероидами в противостоянии с расстояния 1.5 а.е. составит  $3.7'$ , и они будут легко разрешаться в любой телескоп и даже невооруженным глазом, если бы позволила их яркость. Однако, нужно заметить, что наша оценка существенно завышена, и взаимные расстояния в существующих двойных астероидах значительно меньше.

4.32. Определим расстояние до Цереры  $r$  в момент ее квадратуры. Оно равно

$$r = \sqrt{a^2 - a_0^2} = 2.58 \text{ а.е.}$$

Здесь  $a$  и  $a_0$  – радиусы орбит Цереры и Земли соответственно. Если обозначить линейный диаметр Цереры через  $d$ , то угловой диаметр Цереры равен

$$\delta = d/r = 0.53''.$$



Линейная фаза Цереры, равная отношению освещенной части ее углового диаметра к полному угловому диаметру, равна

$$F = \frac{1 + \cos\varphi}{2} = \frac{1 + r/a}{2} = 0.966,$$



где  $\varphi$  – фазовый угол между направлениями от Цереры на Солнце и Землю (см. рисунок). Угловой поперечник освещенной части диска Цереры составит  $\delta \cdot F$ , а его центр будет смещен относительно центра всего диска на величину

$$\Delta = \delta (1 - F) / 2 = 0.009''.$$

Именно такой будет ошибка астрометрических измерений координат Цереры вблизи ее квадратуры, вызванная фазовым эффектом.

4.33. Когда комета приближается к Солнцу, она теряет часть своего вещества, переходящую в газовую фазу или в мелкие пылинки, улетающие от кометы. Именно поэтому вблизи Солнца у комет появляются большие хвосты. Кометы, часто возвращающиеся к Солнцу, быстро теряют свое вещество, постепенно становятся слабее и в результате превращаются в рой метеорных частиц. В то же время кометы, подлетающие к Солнцу редко или вообще один раз, вполне могут оказаться крупными и яркими.

### *Физика звезд*

4.34. Определим полное количество энергии  $E$ , которое излучит Солнце за все время жизни на главной последовательности. Эта величина равна произведению светимости Солнца и времени жизни и составляет около  $1.8 \cdot 10^{44}$  Дж. По формуле Эйнштейна Солнце за это время должно будет «похудеть» на величину

$$m = \frac{E}{c^2},$$

то есть на  $2 \cdot 10^{27}$  кг. Для этого необходимо превратить в гелий в 140 раз большую массу водорода –  $2.8 \cdot 10^{29}$  кг, что в 140 раз превосходит массу самой большой планеты – Юпитера! В это же время данная величина составляет примерно 20% от полной массы солнечного водорода. Остальной водород находится вне солнечного ядра, в ядерные реакции не вступит и впоследствии будет рассеян в космическом пространстве.

4.35. Для решения задачи вспомним, что бальмеровские линии поглощения образуются при переходе электрона в атоме водорода со второго на более высокий уровень. Насколько заметными будут эти линии – зависит от количества атомов водорода в возбужденном состоянии с электроном, находящимся на втором уровне. При температурах 5000 и 6000 К степень ионизации водорода очень мала, и подавляющее большинство атомов водорода находятся в невозбужденном состоянии, то есть с электроном на первом уровне. Отношение числа атомов с электронами на втором и первом уровнях выражается формулой Больцмана:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{E_{12}}{kT}}.$$

Здесь  $g_1$  и  $g_2$  – статистические веса двух состояний атома водорода,  $E_{12}$  – разница энергий двух уровней,  $k$  – постоянная Больцмана и  $T$  – температура. Нас будет интересовать только экспоненциальный множитель, так как он зависит от температуры. Энергия  $E_{12}$  вычисляется по формуле Ридберга:

$$E_{12} = R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} R.$$

Здесь  $R$  – энергия ионизации водорода, равная 13.6 эВ или  $2.18 \cdot 10^{-18}$  Дж. Отношение  $E_{12}/k$  составляет около 118.5 тысяч кельвин, что значительно выше температуры  $T$ . Поэтому при

изменении  $T$  от 6000 до 5000 К экспоненциальный множитель уменьшится сразу в 52 раза. Во столько раз уменьшится количество атомов водорода, способных образовывать бальмеровские линии, и эти линии существенно ослабнут.

4.36. Для абсолютно черного тела справедлив закон Стефана-Больцмана, в соответствии с которым полная светимость звезды пропорциональна  $R^2 T^4$ , где  $R$  и  $T$  – ее радиус и температура. В дальней инфракрасной области, на длинах волн, существенно превосходящих длину волны максимума излучения, по закону Релея-Джинса светимость будет пропорциональна  $R^2 T$ . Для звезд **A** и **B** получаем:

$$\left(\frac{R_A}{R_B}\right)^2 \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^4 = 4,$$

$$\left(\frac{R_A}{R_B}\right)^2 \frac{T_A}{T_B} = \frac{1}{2}.$$

Из этих соотношений можно получить, что у звезды **B** вдвое больший радиус, но вдвое меньшая температура, чем у звезды **A**.

4.37. Казалось бы, показатель цвета, равный разности звездных величин в синей полосе **B** и желто-зеленой полосе **V**, при увеличении температуры должен постоянно уменьшаться, так как максимум излучения звезды будет смещаться в более коротковолновую область. Однако, когда температура звезды станет очень большой, обе цветовые полосы окажутся в длинноволновой (по отношению к максимуму) области спектра. Зависимость интенсивности излучения на единицу частоты  $I_\nu$  от частоты  $\nu$  в этой области описывается формулой Релея-Джинса:

$$I_\nu = \frac{2kT\nu^2}{c^2}.$$

Здесь  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – температура и  $c$  – скорость света. Показатель цвета есть логарифм отношения интенсивности излучения на двух частотах, которое, как видно из формулы, перестает зависеть от температуры. Тем самым, показатель **B–V** не уменьшается бесконечно, а стремится к пределу, определяемому соотношением частот и формой спектральных полос **B** и **V** и составляющему около  $-0.32^m$ .

4.38. Состояние ионизации вещества определяется двумя противоположными процессами – ионизацией атомов и их обратной рекомбинацией. Скорость обоих процессов должна быть одинаковой. Процесс ионизации идет, в основном, за счет энергичных фотонов. Количество актов ионизации, происходящих в единице объема в единицу времени будет равно  $C_1 n_0$ , где  $n_0$  – концентрация атомов, а коэффициент  $C_1$  зависит только от температуры. Количество актов рекомбинации, происходящих при столкновении ионов и электронов будет равно  $C_2 n_+ n_e$ , где  $n_+$  и  $n_e$  – концентрации ионов и электронов, а коэффициент  $C_2$  также зависит от температуры. Если пренебречь двухкратной ионизацией атомов, то величины  $n_+$  и  $n_e$  будут равны друг другу, и условие равенства числа актов ионизации и рекомбинации можно будет записать следующим образом:

$$C_1 n(1-P) = C_2 n^2 P^2$$

Здесь  $n$  – полная концентрация атомов и ионов, а  $P$  – доля ионизованных атомов. Это соотношение можно переписать:

$$\frac{P^2}{1-P} = \frac{C_1}{C_2 n}.$$

Мы видим, что увеличение концентрации частиц при постоянной температуре приводит к уменьшению степени ионизации. Следовательно, на поверхности сверхгиганта степень ионизации будет выше, чем на поверхности белого карлика.

4.39. Из данных наблюдений мы сможем легко определить радиус орбиты планеты. Он равен

$$r = \frac{vT}{2\pi} = 10 \text{ а.е.},$$

где  $v$  и  $T$  — орбитальная скорость и период обращения планеты. Орбита планеты видна с Земли под углом  $\delta$ , равным  $0.064''$ , отсюда расстояние до звезды равно

$$d = \frac{r}{\delta}.$$

Выражая величину  $d$  в парсеках, получаем 156.25 пк.

По обобщенному третьему закону Кеплера мы получаем, что масса звезды равна 10 массам Солнца. Для звезд главной последовательности справедливо, что их светимость возрастает с массой по закону  $L \sim M^N$ , где  $N$  не меньше 3. То есть, светимость этой звезды будет не менее чем в 1000 раз превышать светимость Солнца, а значит ее абсолютная звездная величина будет по крайней мере  $m_0 = -2.8$ . С расстояния  $d$  видимая звездная величина этой звезды будет не слабее

$$m = m_0 - 5 + 5 \lg d = 3.2,$$

то есть звезда видна невооруженным глазом.

4.40. Гравитационная энергия единицы массы вещества протозвезды равна

$$E_G = \frac{GM}{R},$$

где  $M$  и  $R$  — масса и радиус протозвезды. Приравнивая гравитационную энергию к энергии, необходимой для превращения вещества в плазму, получаем, что радиус протозвезды (учитывая, что ее масса равна солнечной), равен  $5.33 \cdot 10^{10}$  м или 76 радиусам Солнца. Далее вспомним, что по закону Стефана-Больцмана, светимость объекта пропорциональна  $R^2 T^4$ . Зная радиус и температуру протозвезды по сравнению с Солнцем, находим ее светимость, она получается равной 360 светимостям Солнца. Абсолютная звездная величина Солнца равна  $+4.72^m$ , значит, абсолютная звездная величина протозвезды равна

$$m_0 = 4.72 - 2.5 \lg 360 = -1.68.$$

### *Двойные и переменные звезды*

4.41. В настоящее время на основе классического эффекта Доплера проводится измерение лучевых скоростей звезд с точностью до 10 м/с. Величина относительного изменения длины волны спектральной линии источника составляет

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} = 3.3 \cdot 10^{-8}.$$

В случае поперечного эффекта Доплера наблюдаемая длина волны  $\lambda'$  линии с лабораторной длиной волны  $\lambda$  равна

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где  $v$  – скорость, направленная перпендикулярно направлению на наблюдателя. С учетом малости отношения  $(v/c)$  величина относительного изменения длины волны будет равна

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v^2}{2c^2}.$$

Получается, что при той же точности спектральных измерений мы сможем зарегистрировать поперечный эффект Доплера при скорости 77 км/с. Это не очень большая скорость, в частности, с такой скоростью обращались бы по своим орбитам две звезды, похожие на Солнце, находящиеся на расстоянии 0.3 а.е. друг от друга. Поперечный эффект Доплера необходимо учитывать при высокоточных измерениях лучевых скоростей.

4.42. Частная фаза затмения одной звезды другой длится вдвое больше полной, когда одна из звезд целиком заходит за другую или находится перед ней. Земля находится в плоскости орбит звезд, следовательно, их радиусы относятся как 3/2. Для дальнейшего решения нам нужно будет сделать отступление в область физики белых карликов. Они состоят из вырожденного газа, давление которого  $p$  не зависит от температуры и в нерелятивистском случае связано с плотностью  $\rho$  соотношением:

$$p = K\rho^{5/3},$$

где  $K$  – некоторая размерная константа. Вырождение приводит к тому, что в случае невращающихся белых карликов их радиус  $R$  однозначно связан с массой  $M_*$ . Точный вывод этого соотношения достаточно сложен, мы получим его на основе метода размерностей. В выражение для радиуса белого карлика должна входить масса и две размерные константы –  $K$  и гравитационная постоянная  $G$ . Это выражение будет иметь вид

$$R = CK^x G^y M_*^z,$$

где  $C$  – безразмерная постоянная. Размерность некоторой величины  $F$  будем обозначать как  $[F]$ , она будет являться произведением длины  $L$ , времени  $T$  и массы  $M$  в некоторых степенях. Размерности четырех величин, входящих в формулу, записанную выше, равны

$$\begin{aligned} [R] &= L, \\ [K] &= L^4 T^{-2} M^{-2/3}, \\ [G] &= L^3 T^{-2} M^{-1}, \\ [M_*] &= M. \end{aligned}$$

Раскладывая связь радиуса и массы белого карлика по размерному базису, получаем систему уравнений относительно показателей степеней  $x$ ,  $y$  и  $z$ :

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 1, \\ -2x - 2y &= 0, \\ -\frac{2}{3}x - y + z &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получаем  $x=1$ ,  $y=-1$ ,  $z=-1/3$ . Итак, радиус белого карлика пропорционален массе в степени  $-1/3$ , то есть уменьшается с увеличением массы.

Вспомним, что в нашей двойной системе первая звезда в полтора раза больше второй. При равенстве эффективных температур именно первая звезда и будет более яркой, хотя ее масса составляет всего  $(3/2)^{-3} = 8/27$  от массы второй звезды. Затмения происходят строго через равные промежутки времени и протекают одинаково, вне зависимости от того, какая из звезд затмевается. Из этого можно сделать вывод, что орбиты звезд круговые. Скорости звезд направлены в противоположные стороны, причем скорость более яркой звезды составляет  $27/8$  от скорости второй, более тяжелой звезды, и  $27/35$  от относительной скорости звезд, которая получается равной  $50$  км/с.

Диаметр меньшей из звезд равен относительной скорости звезд, умноженной на продолжительность частной фазы затмения, что составляет  $16000$  км. Диаметр большей звезды превышает его в полтора раза, составляя  $24000$  км. Радиусы звезд равны  $8000$  и  $12000$  км и лишь незначительно превышают радиус Земли.

Период обращения  $T_0$  в этой системе равен удвоенному промежутку времени между затмениями, то есть  $102.28$  суток. Расстояние между звездами  $D$  составляет

$$D = \frac{vT_0}{2\pi},$$

что равно  $70.32$  млн. км. Выражая период  $T_0$  в годах ( $7/25$  года), а расстояние  $D$  в астрономических единицах ( $7/15$  а.е.), по обобщенному III закону Кеплера получаем суммарную массу звезд, выраженную в массах Солнца:

$$M_s = \frac{D^3}{T_0^2} = \frac{35}{27}.$$

Наконец, масса большей и легкой звезды получается равной  $8/27$  массы Солнца, а более тяжелой и меньшей –  $1$  массе Солнца.

4.43. Переменные звезды типа RR Лиры (их еще называют короткопериодическими цефеидами) характеризуются практически одинаковой светимостью, не зависящей от периода. Абсолютная звездная величина таких звезд  $M$  равна  $+0.5$ . Будем считать, что современными средствами такую звезду можно обнаружить в другой галактике и исследовать ее переменность, если она будет не слабее  $27^m$ . Расстояние до звезды  $r$ , выраженное в парсеках, можно найти по формуле

$$\lg r = 1 + 0.2(m - M).$$

Получается, что звезды типа RR Лиры можно наблюдать на расстоянии до  $3.2$  Мпк.

4.44. Казалось бы, в любой момент времени мы можем по спектру измерить температуру цефеиды и скорость изменения ее радиуса, а потом на основе фотометрических измерений определить и сам радиус по закону Стефана-Больцмана. Однако в этом случае мы делаем предположение, что излучение цефеиды является излучением абсолютно черного тела, что не совсем верно (на это указывает уже само существование спектральных линий).

Тем не менее, существует метод определения радиуса цефеиды, не использующий данное предположение. Мы предполагаем лишь то, что спектр звезды однозначно определяется ее температурой. В течение цикла изменения блеска цефеиды меняется и ее температура и вид спектра. Каждое промежуточное значение температуры будет достигаться дважды за цикл – при ее увеличении и уменьшении. Фиксируя по спектру эти два момента, мы проводим непрерывные измерения лучевой скорости звезды, что позволяет найти разность ее радиусов в эти моменты  $\Delta R$ . Кроме этого, в этих же двух фазах мы измеряем блеск звезды  $m_1$  и  $m_2$ . Так как температура звезды в эти моменты одинакова, светимость (даже без предположения об абсолютно черном теле)

пропорциональна квадрату радиуса звезды. Из этого мы можем получить отношение радиусов звезды в два указанных момента:

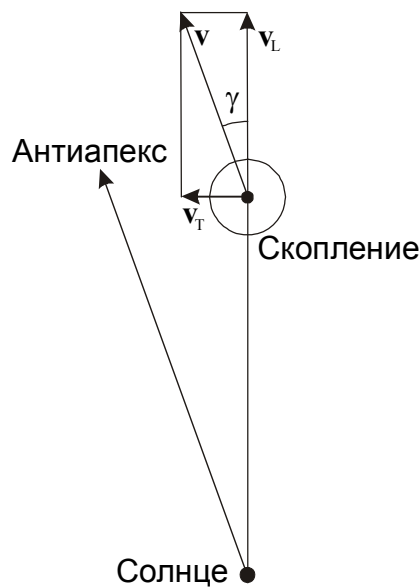
$$\lg \frac{R_1}{R_2} = 0.2(m_2 - m_1).$$

Зная разность и отношение радиусов, мы сможем найти радиусы звезд в эти моменты, а по кривой лучевой скорости – в любой другой момент.

### *Звездные скопления и туманности*

4.45. В основу решения задачи закладывается предположение, что все звезды рассеянного скопления имеют одинаковую скорость в космическом пространстве. Для молодого и немассивного рассеянного звездного скопления такое предположение вполне оправдано, так как относительные скорости звезд внутри скопления значительно меньше скорости скопления в пространстве.

Звезды скопления можно сравнить с метеорным потоком, частицы которого также двигаются по параллельным линиям, а с Земли видны вылетающими из одной точки – радианта, указывающим направление в пространстве, откуда летят метеорные частицы. Однако в нашем случае звезды, напротив, летят на небе в направлении одной точки (антиапекса). Это означает, что в отличие от метеоров, звезды скопления удаляются от Земли, и к значению лучевой скорости, измеренной астрономами, нужно приписать знак «+».



Зная угловое расстояние скопления от его антиапекса, мы знаем угол  $\gamma$  между вектором скорости скопления и направлением от Земли к скоплению (см. рисунок). Тангенциальная компонента скорости скопления  $v_T$  связана с лучевой скоростью  $v_L$  соотношением

$$v_T = v_L \operatorname{tg} \gamma$$

и составляет 7.28 км/с или 1.53 а.е./год. Отрезок в 1.53 а.е. виден с Земли под углом  $0.1''$ , следовательно расстояние до скопления составляет 15.3 пк.

Описанный в решении метод является основным методом определения расстояний до близких рассеянных звездных скоплений и получил название «метод группового параллакса».

4.46. Найдем объемную концентрацию звезд внутри скопления:

$$n = \frac{3N}{4\pi R^3}.$$

При количестве звезд  $N$ , равном  $10^6$ , и радиусе скопления  $R$ , равном 30 пк, концентрация звезд скопления составляет  $8.84 \text{ пк}^{-3}$ . Солнце пролетает внутри скопления расстояние  $2R$ , и число звезд скопления на единицу площади, перпендикулярной направлению на Солнце, составляет

$$n_S = 2nR = \frac{3N}{2\pi R^2}.$$

Примем, что радиус планетной системы  $r$  составляет 100 а.е. или 0.00048 пк (пролет звезды скопления на таком расстоянии может сильно изменить вид Солнечной системы). Вероятность столь близкой встречи со звездой равна произведению площади планетной системы и числу звезд скопления на единицу площади:

$$p = 2\pi r^2 n_S = \frac{3Nr^2}{R^2} = 7.8 \cdot 10^{-4}.$$

Итак, встреча с шаровым скоплением и даже пролет внутри него вряд ли существенно изменит вид Солнечной системы. Нужно также обратить внимание, что вероятность встречи со звездой не зависит от скорости пролета Солнца через скопление.

4.47. Оценим скорость свободного электрона в планетарной туманности по формуле:

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}}.$$

Здесь  $T$  – температура туманности,  $k$  – постоянная Больцмана,  $m_e$  – масса электрона. Средняя тепловая скорость электрона оказывается равной  $6.74 \cdot 10^5 \text{ м/с}$ . За время жизни атома в метастабильном состоянии  $\Delta t$  электрон пролетит расстояние, равное  $v\Delta t$ , и столкнется с атомом, если последний находится внутри “трубки” объемом  $\sigma v\Delta t$ , где  $\sigma$  – сечение взаимодействия атома с электроном. Очевидно, что если суммарный объем всех этих “трубок” покроет весь объем туманности, то вероятность того, что атом в метастабильном состоянии не столкнется с электроном, будет очень мала, если же он будет меньшим, то мы увидим “небулярные” линии в спектре туманности. Математически последнее условие можно записать как

$$n_e \sigma v \Delta t < 1,$$

из чего следует, что небулярные линии будут видны в спектре туманности, если электронная плотность  $n_e$  внутри нее не превосходит  $3 \cdot 10^{12} \text{ м}^{-3}$ .

### ***Галактики, закон Хаббла***

4.48. Определим вначале, как распределена масса внутри галактики. Для спиральной галактики, чья толщина значительно меньше ширины, зависимость орбитальной скорости  $v$  от расстояния до центра галактики  $r$  в некотором приближении выглядит следующим образом:

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}.$$

Здесь  $M(r)$  – масса части галактики, заключенной в круге с радиусом  $r$  и охватывающей всю толщину диска. Получается, что  $M(r)$  пропорциональна  $r^2$ , и вся масса галактики равномерно распределена по ее объему.

Цефеида наблюдается в диске галактики, то есть принадлежит к молодому населению I типа. Для таких цефеид зависимость «период-светимость» имеет вид

$$m_0 = -1.5 - 1.74 \lg P,$$

где  $m_0$  – средняя абсолютная звездная величина цефеиды, а  $P$  – период, выраженный в сутках. Величина  $m_0$  составляет  $-3.24$ , расстояние до галактики  $l$  вычисляется по формуле

$$\lg l = 1 + 0.2(m - m_0)$$

и с учетом известной величины  $m$  оказывается равным около 1 Мпк. Радиус галактики равен

$$R = \frac{ld}{2},$$

где  $d$  – ее видимый угловой диаметр, выраженный в радианах. Средний угловой диаметр Луны составляет  $31.1'$  или  $0.009$  радиан, следовательно радиус галактики составляет  $4.5$  кпк. Наконец, масса галактики составляет

$$M = \pi R^2 h \rho.$$

Здесь  $h$  – толщина диска галактики,  $\rho$  – ее постоянная плотность. Подставляя численные значения, получаем  $6.4 \cdot 10^{10}$  масс Солнца.

4.49. Расстояние до галактики  $D$  составляет 2 Мпк, а ее угловой радиус  $r$  равен  $0.5^\circ$  или  $0.0087$  радиан, следовательно радиус галактики  $R$  равен  $17.5$  кпк. При фокусном расстоянии телескопа 2 метра изображение радиуса галактики будет иметь размер  $17.5$  мм. При этом конец изображения будет сдвинут на  $17.5 \cdot \sin 5^\circ = 1.52$  мм, то есть спектральные линии в зеленой области спектра ( $5500 \text{ \AA}$ ) будут сдвинуты на  $7.6 \text{ \AA}$ , что дает величину орбитальной скорости на краю галактики:

$$v = c \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = 414.5 \text{ км/с}.$$

Считая орбиты звезд круговыми и зная радиус галактики  $R$  и орбитальную скорость на ее краю  $v$ , мы находим период обращения:

$$T = \frac{2\pi R}{v}.$$

Сигнал от галактики до Земли и обратно дойдет за время

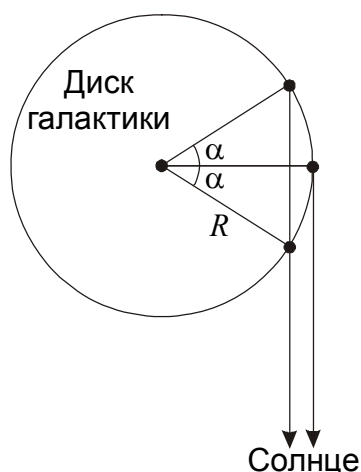
$$t = \frac{2D}{c}.$$

За это время точка, из которой был отправлен сигнал, повернется относительно центра Галактики на угол

$$\alpha = \frac{2\pi t}{T} = \frac{2Dv}{Rc},$$

что в градусной мере составляет  $18.1^\circ$ .





Вне зависимости от того, приближается данная точка к Земле или удаляется от нее (см. рисунок), ответный сигнал нужно посылать под углом

$$\beta = r \cos \alpha = 0.47^\circ$$

к центру галактики.

4.50. В школьный телескоп на пределе видимости можно различить галактики до  $12^m$ . Абсолютная звездная величина нашей Галактики составляет около  $-20.5^m$ . Обозначая эти величины как  $m$  и  $M$  соответственно, определим расстояние  $r$ , с которого наша Галактика с трудом была бы видна в школьный телескоп:

$$\lg r = 1 + 0.2(m - M).$$

Расстояние оказывается равным 31.6 Мпк. По закону Хаббла, красное смещение галактики составит

$$z = \frac{Hr}{c} = 0.007.$$

Здесь  $c$  – скорость света,  $H$  – постоянная Хаббла. Приходится признать, что возможности земного школьного телескопа достаточно скромны.

4.51. Определим расстояние до скопления галактик по закону Хаббла:

$$d = \frac{cz}{H} = 460 \text{ Мпк.}$$

Угловой радиус скопления галактик  $\gamma$  равен  $2.5^\circ$ , следовательно, пространственный радиус составляет

$$R = d \sin \gamma = 20 \text{ Мпк.}$$

Максимальная разность лучевых скоростей отдельных галактик и всего скопления примерно равна круговой скорости на краю скопления  $v$ . Из этого можно получить полную массу скопления галактик:

$$M = \frac{v^2 R}{G} = 1.2 \cdot 10^{15} M_0.$$

Здесь  $M_0$  – масса Солнца. Определим теперь суммарную массу всех звезд скопления. Абсолютная звездная величина каждой из галактик равна

$$m_0 = m + 5 - 5 \lg d = -20.3.$$

Если считать, что каждая звезда похожа на Солнце с абсолютной звездной величиной  $+4.7^m$ , то каждая галактика содержит примерно  $10^{10}$  звезд, и суммарная масса звезд скопления будет равна  $10^{14} M_0$ . Мы видим, что звезды составляют лишь 8% массы всего скопления галактик, остальные 92% приходятся на темную материю.

4.52. Расстояние до квазара можно вычислить по закону Хаббла, однако, так как величина  $z$  достаточно велика, нужно пользоваться релятивистской формулой для эффекта Доплера. Скорость удаления галактики  $v$  будет равна

$$v = c \frac{z^2 + 2z}{z^2 + 2z + 2} = \frac{3c}{5}.$$

Расстояние до квазара составляет

$$d = \frac{v}{H} = \frac{3c}{5H} = 2.8 \cdot 10^9 \text{ пк.}$$

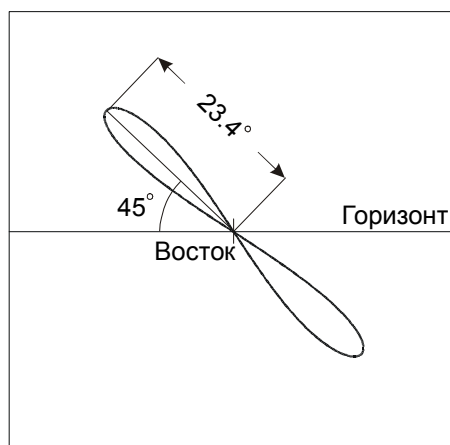
Галактический параллакс есть угол, под которым с этого расстояния виден радиус орбиты Солнца вокруг центра нашей Галактики  $r$ , равный 8 кпк. Этот угол равен

$$\pi_G = \frac{r}{d} = 2.9 \cdot 10^{-6} = 0.6''.$$

## Часть 5. Открытая Заочная Астрономическая Олимпиада (2005 год)

5.1. В любом месте Земли, кроме полюсов, точка весеннего равноденствия восходит ровно через одни звездные сутки (около 23 часов 56 минут) после предыдущего восхода. Следовательно, восходы искусственного спутника также отстоят друг от друга на одни звездные сутки. Так как мы не учитываем суточное параллактическое смещение спутника, он всегда будет находиться на эклиптике. На широте Краснодара ( $+45^\circ$ ) эклиптика не может совпадать с горизонтом и, являясь большим кругом небесной сферы, пересекает горизонт в двух противоположных точках. Одна из них – восходящая в этот момент точка весеннего равноденствия, вторая – точка осеннего равноденствия. Таким образом, в момент своего восхода искусственный спутник Земли находился в одной из этих двух точек. По прошествии одних звездных суток спутник будет восходить в той же точке неба. В противоположной точке круговой орбиты он бы не восходил, а заходил за горизонт, так как в любой момент времени над горизонтом располагается ровно половина орбиты спутника.

Очевидно, что спутник, вращаясь вокруг Земли, не может быть неподвижным относительно звезд. Рассмотрим случаи, при которых искусственный спутник Земли, один раз восходя и заходя за горизонт, возвращается в ту же точку неба по прошествии звездных суток. Это, в частности, может быть, если период обращения спутника равен звездным суткам, а направление совпадает с направлением вращения Земли. Такая орбита похожа на геостационарную, но так как спутник вращается не в плоскости экватора, а в плоскости эклиптики, на земном небе он будет описывать узкую «восьмерку» размером около  $47^\circ$ . Если при этом он окажется в точке весеннего равноденствия в момент ее восхода, то он и сам будет восходить в это же время на востоке каждые звездные сутки (см. рисунок).



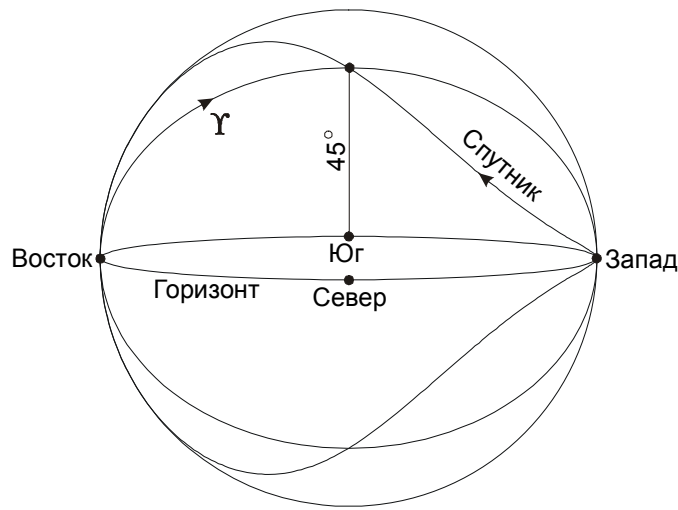
Однако данная картина противоречит условию задачи – из рисунка можно убедиться, что спутник всегда будет находиться в восточной части неба и никогда не окажется над южным горизонтом. Нам необходимо рассмотреть еще один возможный вариант, при котором спутник за одни сутки завершает оборот по небу относительно земного наблюдателя, один раз восходя и заходя за горизонт. Обозначим синодический период обращения спутника через  $S$ , сидерический (звездный) период его обращения через  $T$ , а продолжительность звездных суток через  $T_0$ . Эти три величины связаны соотношением

$$\pm \frac{1}{S} = \pm \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}.$$

Знак «+» перед величинами  $(1/S)$  и  $(1/T)$  соответствует вращению спутника относительно наблюдателя и относительно центра Земли в направлении, совпадающем с направлением вращения Земли, а знак «-» соответствует противоположному направлению. Так как величины  $S$  и  $T_0$  равны друг другу, знак «-» перед величиной  $(1/S)$  стоять не может, иначе величина  $T$  обратится в бесконечность. Так как величина  $S$  положительна, решение будет существовать только при одной комбинации знаков:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0},$$

из чего мы получаем, что сидерический период обращения спутника  $T$  равен половине звездных суток, то есть 11 часам 58 минутам. Спутник вращается в одном направлении с Землей, но с вдвое большей угловой скоростью, поэтому он, как Фобос на Марсе, будет восходить на западе и заходить на востоке. Во время своего восхода спутник будет находиться в точке *осеннего* равноденствия, которая сама при этом будет заходить за горизонт. Перемещаясь с запада на восток, спутник будет двигаться навстречу точке весеннего равноденствия, взойшедшей одновременно с ним в противоположной точке неба (см. второй рисунок). Через 5 часов 59 минут после восхода спутник сделает половину сидерического оборота вокруг Земли и окажется в точке весеннего равноденствия, которая при этом будет кульминировать над южным горизонтом на высоте  $45^\circ$ . Мы получили ответ на первый вопрос задачи.

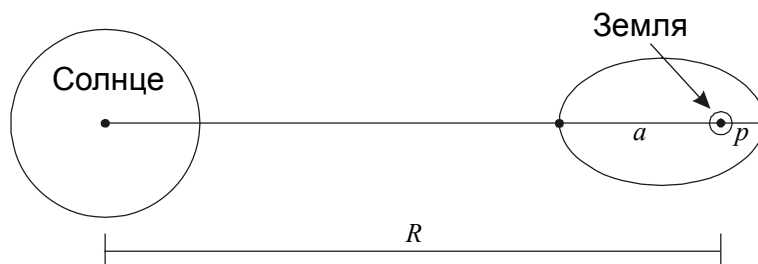


Для ответа на второй вопрос достаточно воспользоваться обобщенным III законом Кеплера. Радиус орбиты равен

$$R = \left( \frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3},$$

что составляет 26.6 тысяч километров ( $M$  – масса Земли).

5.2. Возможное значение эксцентриситета орбиты спутника ограничено сверху приливным влиянием Солнца (влияние Луны, по условию задачи, в расчет не берется). Если в точке апогея орбиты спутник подойдет к внутренней точке Лагранжа системы Солнце-Земля, орбита спутника станет неустойчивой, и он перейдет на гелиоцентрическую орбиту, став искусственной планетой Солнечной системы. Рассмотрим наиболее критический для устойчивости орбиты случай, когда в апогее спутник оказывается между Солнцем и Землей (см. рисунок). Так как орбита спутника лежит в плоскости эклиптики, то подобная ситуация обязательно реализуется один раз в год.



Обозначим перигейное и апогейное расстояние до спутника соответственно как  $p$  и  $a$ , расстояние от Солнца до Земли – через  $R$ . Предположим, что в точке апогея спутник оказался во внутренней точке Лагранжа. Эта точка может двигаться вокруг Солнца с той же угловой скоростью  $\omega$ , что и Земля. Запишем уравнения вращения точки Лагранжа и Земли:

$$\frac{GM}{(R-a)^2} - \frac{Gm}{a^2} = \omega^2(R-a);$$

$$\frac{GM}{R^2} = \omega^2 R.$$

Учитывая, что величина  $a$  значительно меньше, чем  $R$ , можно записать

$$\frac{GM}{(R-a)^2} = \frac{GM}{R^2} + \frac{2GMa}{R^3}.$$

Выражая величину  $\omega$  из уравнения вращения Земли, получаем

$$\frac{3GMa}{R^3} = \frac{Gm}{a^2}.$$

Из последнего соотношения получаем оценку максимального значения апогейного расстояния

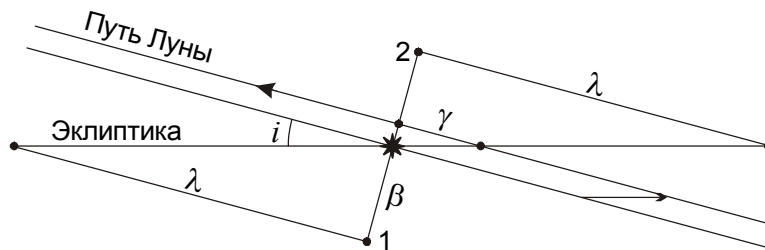
$$a = R \left( \frac{m}{3M} \right)^{1/3} = 1.497 \text{ млн. км}$$

и эксцентриситета орбиты спутника (с учетом известного значения  $p$ , равного 384 тысячам километров):

$$e = \frac{a-p}{a+p} = 0.592.$$

5.3. Если бы Луна обращалась вокруг Земли точно в плоскости эклиптики, то она покрывала бы звезду в точке летнего солнцестояния в свой каждый оборот вокруг Земли, причем это покрытие было бы видно в экваториальном и северном тропическом поясах нашей планеты. На самом деле плоскость орбиты Луны наклонена к плоскости эклиптики на угол  $i$ , равный  $5.15^\circ$ , что оказывается достаточным для того, чтобы в большинстве случаев Луна прошла на небе выше или ниже звезды, и покрытие не наступило. Для того, чтобы оно все же случилось, Луна, проходя на небе мимо звезды, должна находиться вблизи одного из двух узлов своей орбиты, в которых она пересекает плоскость эклиптики.

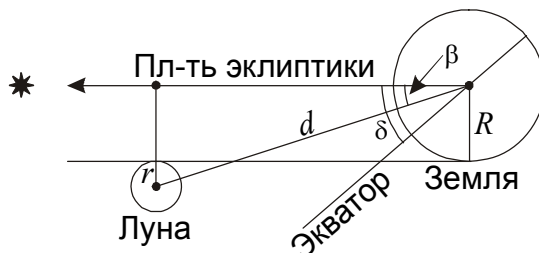
Сидерический (звездный) период обращения Луны  $T_S$  составляет 27.321662 суток, а драконический период  $T_D$  (период возвращения к тому же узлу орбиты) немного короче – 27.212221 суток. Завершая свой оборот относительно звезд, Луна совершит 1.00402 драконических оборота, и если одно покрытие произошло точно в восходящем узле лунной орбиты, то следующее произойдет уже после прохождения этого узла, при этом Луна окажется чуть выше, и область видимости покрытия на Земле сместится на север (см. рисунок).



Угловое расстояние между Луной и узлом орбиты составит

$$\gamma = 360^\circ \cdot \frac{T_S - T_D}{T_D} = 1.448^\circ.$$

Смещаясь на такую величину каждый сидерический месяц, линия узлов лунной орбиты сделает полный оборот за 248.65 сидерических месяцев, то есть за 18.6 лет. За этот период наступят две эпохи покрытий Луной звезды вблизи эклиптики – во время прохождения восходящего и нисходящего узла орбиты вблизи звезды. Для звезды, находящейся точно на эклиптике, эти серии будут отстоять на 9.3 года друг от друга. В задаче требуется найти продолжительность одной серии. Для этого нужно определить, на каком максимальном удалении от узла орбиты Луны может произойти покрытие.



На втором рисунке показана предельная ситуация, при которой касательное покрытие звезды Луной видно только в одной точке Земли. Максимальное угловое расстояние Луны от эклиптики в этом случае составляет

$$\beta = \arcsin \frac{R+r}{d} = 1.209^\circ.$$

Здесь, по условию задачи, мы принимаем орбиту Луны круговой с радиусом  $d$ , равному 384.4 тысяч км,  $R$  и  $r$  – радиусы Земли и Луны. Возвращаясь к первому рисунку, вычисляем максимальное расстояние от Луны до узла орбиты во время покрытия:

$$\lambda = \beta \operatorname{ctg} i = 13.41^\circ.$$

Среднее количество покрытий в одной серии, как видно из первого рисунка, будет равно

$$N_A = \frac{2\lambda}{\gamma} = 18.52.$$

Реальное число покрытий примерно с одинаковой вероятностью будет равно 18 или 19. Продолжительность серии составит 17 или 18 сидерических периодов обращения Луны, то есть 1.27 или 1.35 года.

Первое покрытие звезды Луной в случае восходящего узла произойдет вблизи положения 1 на первом рисунке, та же ситуация изображена на втором рисунке. Луна заденет звезду своим северным краем, и это покрытие будет видно в южном полушарии Земли. Луна будет находиться на северном горизонте (точнее, в  $5.15^\circ$  вдоль горизонта к западу от точки севера), склонение

звезды  $\delta$  составляет  $+23.4^\circ$ , и покрытие будет наблюдаться вблизи Южного Полярного Круга. Последнее покрытие серии (положение 2 на первом рисунке) будет видно вблизи Северного Полярного Круга в  $5.15^\circ$  к востоку от точки севера вдоль горизонта.

5.4. В таблице приведены координаты перечисленных в условии городов.

Город	Широта, $^\circ$	Долгота, $^\circ$
Осло	+59.9	+10.7
Варшава	+52.2	+21.1
Констанца	+44.2	+28.6
Анкара	+39.9	+32.9
Багдад	+33.3	+44.4
Керман	+30.3	+57.1
Исламабад	+33.7	+73.1

Из таблицы видно, что тень большую часть времени двигалась на юго-восток, и лишь в конце она стала двигаться на восток, а затем даже повернула к северо-востоку. Видимый путь тени по поверхности Земли показан на карте.



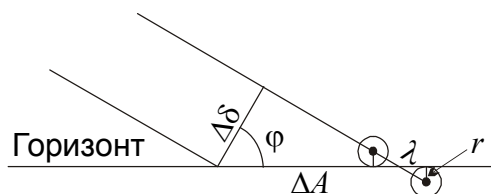
Рассмотрим, как могла бы двигаться тень Луны по умеренным и тропическим широтам северного полушария в середине четырех астрономических сезонов года (напоминаем, что началом сезона считается момент равноденствия или солнцестояния). На рисунке для каждого из четырех случаев показан вид Земли и полосы тени со стороны Солнца и Луны. Лунная тень движется на рисунке слева направо, в направлении, противоположном направлению движения Земли по орбите (на самом деле, она образует с этим направлением угол  $5.15^\circ$ , но это не изменяет решения задачи, так как данный угол существенно меньше угла наклона земного экватора к эклиптике).



На втором рисунке мы видим, что подобным образом тень может двигаться по Земле только астрономической осенью, то есть в промежутке между осенним равноденствием и зимним солнцестоянием.

Данная задача имеет реальный прототип – полное солнечное затмение 19 ноября 1816 года, карта которого приведена выше. Полоса полной фазы тогда прошла через центр или пригороды всех семи городов, приведенных в условии задачи.

5.5. Значения азимутов точек восхода и захода указывает на то, что планета находилась вблизи небесного экватора. Так как планеты располагаются на небе вблизи эклиптики, значит, это была окрестность точки весеннего или осеннего равноденствия. Между восходом и заходом планеты прошло примерно 12 часов. Азимут точки захода по модулю на  $0.4^\circ$  превосходит азимут точки восхода, то есть за эти 12 часов склонение планеты увеличилось. Определим, насколько оно увеличилось.



Из рисунка видно, что изменение модуля азимута восхода и захода  $\Delta A$  связано с изменением склонения объекта  $\Delta \delta$  и широтой места наблюдения  $\varphi$  (равной  $+60^\circ$ ) соотношением:

$$\Delta \delta = \Delta A \cos \varphi = +0.2^\circ.$$

Учет атмосферной рефракции не изменит этот результат, так как вблизи небесного экватора рефракция изменяет значения азимутов восхода и захода, но практически не изменяет их разность  $\Delta A$ . Далее заметим, что планета движется среди звезд вдоль эклиптики – это справедливо всегда, кроме моментов стояний планет, но тогда их угловая скорость очень маленькая. Вблизи точек равноденствия эклиптика проходит под углом  $\varepsilon = 23.4^\circ$  к небесным параллелям (и экватору), и полное угловое перемещение планеты среди звезд за 12 часов составит

$$\gamma = \frac{\Delta \delta}{\sin \varepsilon} = \Delta A \frac{\cos \varphi}{\sin \varepsilon} = 0.5^\circ.$$

В итоге, угловая скорость планеты составляет  $1^\circ$ /сутки, что практически совпадает с угловой скоростью движения Солнца по небу. Ни одна планета не может достичь такой угловой скорости во время попятного движения, да и прямым движением с такой скоростью могут перемещаться



только две внутренние планеты, Меркурий и Венера, во время эпохи максимального углового расстояния от Солнца.

Для того чтобы определить, какая именно эта планета, определим ее видимые размеры. Известно, что продолжительность захода диска планеты за горизонт  $\Delta t$  составила 3.2 секунды. Находясь вблизи небесного экватора, планета переместилась за это время относительно земного наблюдателя на угловое расстояние  $\lambda$ , равное

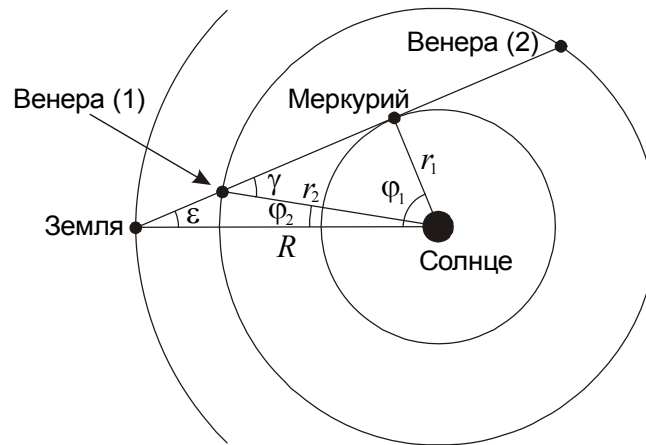
$$\lambda = 15'' \cdot \Delta t = 48''.$$

Угловой диаметр планеты составляет

$$d = 2r = \lambda \cos \varphi = 24''.$$

Полученное значение совпадает с угловыми размерами диска Венеры во время ее наибольшей элонгации (видимый размер Меркурия в это время не превышает  $8''$ ). Планета находится в наибольшей элонгации, в  $47^\circ$  от Солнца и, двигаясь в прямом направлении, проходит точку весеннего равноденствия. Если это наибольшая восточная элонгация, то картина наблюдалась в начале февраля, если наибольшая западная элонгация – в начале мая.

5.6. Положение Меркурия, Венеры и Земли в указанный в условии момент показано на рисунке.



Находясь в соединении с Меркурием, Венера может находиться в двух точках своей орбиты, помеченных на рисунках цифрами 1 и 2. Но, как уже было отмечено в решении предыдущей задачи, угловой диаметр Меркурия в момент наибольшей элонгации составляет около  $8''$ , следовательно, угловой диаметр Венеры превышает  $40''$ . Такое может быть, только если Венера находится в положении 1, недалеко от Земли. Обозначим радиусы орбит Меркурия, Венеры и Земли через  $r_1$ ,  $r_2$  и  $R$  и определим разность геоцентрических долгот Земли и каждой из двух внутренних планет  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в данный момент. Для Меркурия получаем

$$\varphi_1 = \arccos \frac{r_1}{R} = 67.2^\circ.$$

Разница долгот Земли и Венеры вычисляется из треугольника Солнце-Венера-Земля с учетом свойства смежных углов:

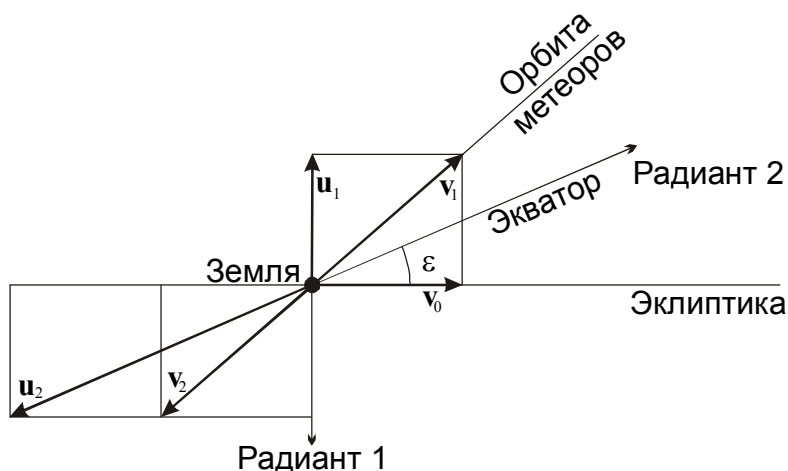
$$\varphi_2 = \gamma - \varepsilon = \arcsin \frac{r_1}{r_2} - \arcsin \frac{r_1}{R} = 9.6^\circ.$$

Время, оставшееся до нижнего соединения внутренней планеты, равно

$$T_{1,2} = \frac{\Phi_{1,2}}{360^\circ} \cdot S_{1,2},$$

где  $S$  – синодический период внутренней планеты, равный 115.9 суткам для Меркурия и 583.9 суткам для Венеры. Подставляя численные значения, получаем, что нижнее соединение Меркурия произойдет через 21.6 дня, а нижнее соединение Венеры – через 15.6 дней после рассматриваемого момента. Таким образом, Венера вступит в нижнее соединение на 6 суток раньше Меркурия.

5.7. Так как оба метеорных роя движутся по одной и той же орбите в разные стороны, в момент их встречи они будут иметь гелиоцентрические скорости, равные по величине и противоположные по направлению. Радиант метеорного потока указывает направление, противоположное геоцентрической скорости метеоров, поэтому радианты двух потоков не оказались в противоположных точках неба.



Обозначим вектор скорости Земли через  $\mathbf{v}_0$ , вектора гелиоцентрических скоростей метеорных потоков через  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$ , а вектора их геоцентрических скоростей через  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$ . Для этих векторов справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0 = -\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0. \end{aligned}$$

Складывая их, получаем:

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = -2\mathbf{v}_0.$$

Радиант первого метеорного потока находится в южном полюсе эклиптики, следовательно, плоскость рисунка, содержащая вектор  $\mathbf{u}_1$ , перпендикулярна плоскости эклиптики, пересекая ее по прямой, содержащей вектор  $\mathbf{v}_0$ . Оба вектора перпендикулярны радиусу-вектору Земли, направленному из центра Солнца, и вся картинная плоскость, в том числе и гелиоцентрические скорости метеоров, перпендикулярны линии Земля-Солнце. Следовательно, в момент встречи с Землей метеоры находились в точке перигелия или афелия своей орбиты, если эта орбита не круговая.

Точка эклиптики, в направлении которой двигалась Земля в момент встречи с метеорами – одна из двух точек пересечения большого круга эклиптики и большого круга картинной плоскости. Последний представляет собой круг склонения, охватывающий все точки неба с прямым восхождением 6ч и 18ч (в этом можно убедиться по координатам радиантов потоков). Значит, две точки пересечения больших кругов – точки солнцестояний. Из последнего векторного уравнения следует, что проекции векторов  $\mathbf{u}_2$  и  $\mathbf{v}_0$  на эклиптику имеют противоположные знаки (так как вектор  $\mathbf{u}_1$  перпендикулярен эклиптике). С учетом координат второго радианта делаем вывод, что движение Земли направлено в точку солнцестояния, ближайшую к радианту второго

потока – в точку зимнего солнцестояния. Такое направление скорости Земля имеет в день весеннего равноденствия – 21 марта. Остается ответить на первый вопрос задачи.

Угол между направлением на второй радиант (небесным экватором) и скоростью движения Земли  $\varepsilon$  равен  $23.4^\circ$ . Спроектировав векторное выражение для суммы скоростей  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  на две координатные оси, получаем:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 \sin \varepsilon, \\ 2v_0 &= u_2 \cos \varepsilon \end{aligned}$$

и далее

$$u_1 = 2v_0 \operatorname{tg} \varepsilon.$$

Гелиоцентрическая скорость метеоров в момент встречи с Землей равна

$$v_1 = \sqrt{u_1^2 + v_0^2} = v_0 \sqrt{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \varepsilon} = 39.4 \text{ км/с.}$$

Эта скорость превышает круговую скорость  $v_0$ , но не превосходит вторую космическую скорость. Таким образом, орбита метеоров эллиптическая, и они находятся в точке перигелия. Обозначив расстояние от Солнца до Земли через  $r$ , запишем выражение для скорости тела в перигелии:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{a} \cdot \frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\frac{GM}{r} (1+e)} = v_0 \sqrt{1+e}.$$

Здесь  $a$  – большая полуось орбиты метеорных тел,  $e$  – ее эксцентриситет,  $M$  – масса Солнца. В результате,

$$e = 4 \operatorname{tg}^2 \varepsilon = 0.75.$$

5.8. Для решения задачи необходимо вспомнить, что при отсутствии поглощения света поверхностная яркость светила *не зависит* от его расстояния до наблюдателя. Общая яркость уменьшается пропорционально квадрату расстояния, но в той же пропорции уменьшается и видимая площадь светила. Для звезд, самостоятельно излучающих энергию, в приближении абсолютно черного тела поверхностная яркость определяется только температурой поверхности звезды, увеличиваясь пропорционально ее четвертой степени. Бетельгейзе – красный сверхгигант спектрального класса M2 с температурой поверхности около 3000 К, что вдвое меньше солнечной. Поверхностная яркость Бетельгейзе будет в 16 раз меньше поверхностной яркости Солнца.

Венера сама в видимом диапазоне спектра не излучает, а только отражает свет Солнца. Отношение максимальной поверхностной яркости Венеры (в центре диска вблизи верхнего соединения) и поверхностной яркости Солнца будет равно

$$\frac{j_V}{j_0} = A \frac{r^2}{R^2} = \frac{1}{37300}.$$

Здесь  $A$  – альbedo Венеры,  $r$  – радиус Солнца и  $R$  – радиус орбиты Венеры. В итоге, поверхностная яркость Бетельгейзе в 2330 раз превосходит поверхностную яркость Венеры.

5.9. Выражая угловой диаметр скопления в радианах, умножая на расстояние до скопления и деля на 2, получаем радиус скопления  $r_0$ , равный 10.9 пк. Объем скопления равен

$$V = \frac{4}{3} \pi r_0^3 = 5.42 \cdot 10^3 \text{ пк}^3.$$

Солнце имеет абсолютную звездную величину  $M_0$ , равную  $+4.7^m$ . С расстояния  $d$ , равного 3 кпк, оно выглядело бы как звезда величины  $m_0$ :

$$m_0 = M_0 - 5 + 5 \lg r = 17.1.$$

Обозначив звездную величину всего скопления через  $m$ , получаем выражение для количества звезд в скоплении

$$N = 10^{0.4(m_0 - m)} = 1.095 \cdot 10^5$$

и объемной концентрации звезд

$$n = \frac{N}{V} = 20.2 \text{ пк}^{-3}.$$

На ночном небе планеты в центре скопления видны звезды одной половины шара, равномерно заполняющие ее по объему. Обозначим освещенность, которую создает на планете в центре скопления одна звезда  $0^m$  через  $J$ . Рассчитаем освещенность, которую создадут на этой планете все звезды, попадающие в тонкую полусферическую оболочку с радиусом  $r$  и толщиной  $\Delta r$ . Количество этих звезд будет равно произведению концентрации звезд на объем оболочки:

$$N_r = 2\pi r^2 \Delta r n.$$

Звездная величина и освещенность от каждой звезды на планете составит

$$m = M_0 - 5 + 5 \lg r,$$

$$j_r = \frac{J \cdot 10^{2-0.4M_0}}{r^2}.$$

Здесь  $r$  выражается в парсеках. Освещенность на ночном небе от всех звезд полусферы равна

$$J_r = 2\pi n J \cdot 10^{2-0.4M_0} \cdot \Delta r.$$

Мы видим, что эта освещенность пропорциональна толщине оболочки и не зависит от ее радиуса. Представляя всю полусферу внутри скопления как сложение подобных оболочек, мы получаем выражение для полной освещенности от ночного неба планеты:

$$J_T = 2\pi n J \cdot 10^{2-0.4M_0} \cdot r_0 = J \cdot 1.83 \cdot 10^3.$$

Суммарная звездная величина всех звезд половины шара равна

$$m_T = -2.5 \lg \frac{J_T}{J} = -8.2.$$

Небо этой планеты будет значительно ярче безлунного ночного неба на Земле, и светила вне шарового скопления дадут лишь незначительный вклад в его яркость. Но лунная ночь на Земле (блеск полной Луны равен  $-12.7^m$ ) все же в 63 раза ярче, чем небо планеты в центре шарового скопления.

5.10. Массовая плотность вещества внутри галактики  $\rho$  равна

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 d}.$$

Здесь  $M$ ,  $R$  и  $d$  – масса, радиус и толщина диска галактики. В некотором приближении можно считать, что при вращении звезды по круговой орбите с радиусом  $r$  внутри диска на нее будет влиять только та часть галактики, которая заключена внутри цилиндра с радиусом  $r$ . Масса этой части галактики равна

$$m(r) = \pi r^2 d \rho = M \frac{r^2}{R^2}.$$

Угловая скорость вращения звезды вокруг центра Галактики составит

$$\omega(r) = \sqrt{\frac{Gm(r)}{r^3}} = \sqrt{\frac{GM}{R^3} \cdot \frac{R}{r}} = \omega_0 \sqrt{\frac{R}{r}}.$$

Здесь  $\omega_0$  – угловая скорость вращения края галактики. Обратим внимание, что зависимость угловой скорости от расстояния в данном случае более слабая, чем для кеплеровских орбит, где мы бы получили степень  $-3/2$ . Синодический период звезды с радиусом орбиты  $r_1$  при наблюдении со звезды с радиусом орбиты  $r_2$  равен

$$S = \frac{2\pi}{\omega(r_1) - \omega(r_2)} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \cdot \frac{1}{\sqrt{R/r_1} - \sqrt{R/r_2}}$$

Подставляя численные значения, получаем величину синодического периода: 1.07 миллиардов лет.

## Часть 6. Астрономический тест

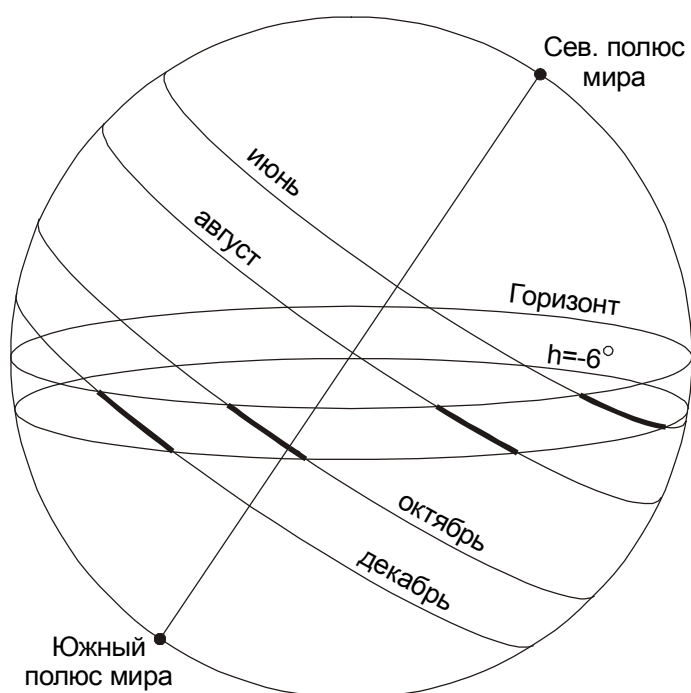
### Ответы:

- |                   |                   |
|-------------------|-------------------|
| 6.1. B, D, C, A.  | 6.14. A, B, D, C. |
| 6.2. C, B, D, A.  | 6.15. D, C, B, A. |
| 6.3. D, C, A, B.  | 6.16. A, C, D, B. |
| 6.4. B, A, D, C.  | 6.17. C, A, D, B. |
| 6.5. B, C, A, D.  | 6.18. D, B, A, C. |
| 6.6. C, B, A, D.  | 6.19. D, A, C, B. |
| 6.7. B, D, C, A.  | 6.20. B, C, A, D. |
| 6.8. D, B, C, A.  | 6.21. A, C, B, D. |
| 6.9. C, D, A, B.  | 6.22. D, C, A, B. |
| 6.10. C, A, B, D. | 6.23. D, A, C, B. |
| 6.11. D, B, C, A. | 6.24. C, D, A, B. |
| 6.12. C, D, B, A. | 6.25. B, A, D, C. |
| 6.13. A, D, B, C. |                   |

### Объяснения к ответам:

6.1. Тропосфера – самый нижний слой атмосферы (высоты от 0 до 15 км). Максимум концентрации озона достигается на высоте около 25 км, серебристые облака образуются на высоте 80-85 км. Ионосфера начинается на высотах около 90 км и простирается в более высокие слои атмосферы.

6.2. Продолжительность гражданских сумерек определяется скоростью погружения Солнца под горизонт в интервале высот от  $0^\circ$  до  $-6^\circ$ , то есть перед восходом или после захода. Скорость изменения высоты над горизонтом (или под ним) максимальна, когда светило находится на западе или востоке. Как раз на это время попадают октябрьские сумерки, которые являются самыми короткими. Длиннее сумерки в августе, еще длиннее они становятся вблизи солнцестояний, когда Солнце восходит вдали от точки востока, а заходит вдали от точки запада. Самыми длинными будут сумерки в июне, так как они происходят вблизи нижней кульминации Солнца, и оно движется практически параллельно горизонту.



6.3. Звезды нужно расположить в порядке возрастания склонения.

6.4. Казалось бы, на экваторе все звезды находятся половину звездных суток над горизонтом и половину – под ним. Но если учесть атмосферную рефракцию, то окажется, что звезды будут находиться над горизонтом чуть более половины звездных суток. Этот «излишек» будет возрастать при удалении от небесного экватора к полюсам, где звезды медленней восходят и заходят за горизонт, а сами точки полюсов вообще будут находиться над горизонтом постоянно. Поэтому звезды нужно разместить в порядке удаления от небесного экватора.

6.5. Звезды нужно расположить в порядке приближения от полюсов мира, видимых лишь в одном полушарии Земли, к небесному экватору, видимому со всей нашей планеты.

6.6. Созвездие Малого Пса лучше всего видно в самом начале года, созвездие Гидры – в конце зимы и начале весны, созвездие Геркулеса – в начале лета и созвездие Кита – осенью.

6.7. Метеорный поток Квадрантиды активен в первые дни нового года, Персеиды – в августе, Ориониды – в октябре и Геминиды – в декабре.

6.8. Задачу можно решить, даже не зная точных значений периодов обращения Луны. Достаточно лишь вспомнить, что лунные узлы медленно движутся по орбите Луны навстречу самой Луне, из-за этого затмения каждый год происходят в более ранний сезон. Следовательно, драконический период обращения Луны меньше сидерического (звездного). А вот аномалистический месяц, напротив, больше сидерического, так как линия апсид лунной орбиты движется в ту же сторону, что и Луна, и нашему спутнику приходится как бы догонять ее. В ту же сторону, только с намного большей скоростью, происходит и видимое движение Солнца, и чтобы догнать его, Луне потребуется еще больше времени. Поэтому синодический период обращения Луны – самый длинный из четырех названных.

6.9. Физическая либрация Луны не превосходит сотых долей градуса, параллактическая –  $1^\circ$ , либрация по широте –  $7^\circ$ , либрация по долготе может достигать  $8^\circ$ .

6.10. В течение покрытия звезды Луна проходит на небе расстояние, не превышающее свой угловой диаметр. Значительно большее расстояние Луна может пройти во время затмения, так как Солнце или земная тень имеют большой угловой диаметр. При этом угловой диаметр лунной тени превышает угловой диаметр Солнца, и лунное затмение длится больше солнечного. Прохождение Меркурия по диску Солнца, разумеется, самое продолжительное из всех указанных явлений – оно может длиться до 8 часов.

6.11. Очевидно, что частота прохождений Меркурия по диску Солнца – наименьшая из всех указанных явлений. Для того, чтобы расставить по порядку остальные три явления, обратимся к рисунку.



Мы видим, что для наступления теневого лунного затмения Луна должна находиться в положении 1 или еще ближе к плоскости эклиптики. Для покрытия звезды в плоскости эклиптики Луна может находиться дальше, вплоть до положения 2, а для солнечного затмения – еще дальше от плоскости

эклиптики (положение 3). Частота событий будет тем больше, чем менее жесткие ограничения они накладывают на расстояние Луны от плоскости эклиптики.

6.12. Блеск Марса во время среднего противостояния составляет  $-2.0^m$ , блеск Юпитера в среднем противостоянии равен  $-2.7^m$ , во время великого противостояния блеск Марса может достигнуть  $-2.9^m$ , но самой яркой является Венера в наибольшей элонгации:  $-4.4^m$ .

6.13. Синодический период Меркурия равен 116 дней, Юпитера – 399, Венеры – 584 и Марса – 780 суток.

6.14. Если считать ночным временем период, когда Солнце опускается глубже 6 градусов под горизонт, то Меркурий ни в каких областях Земли не сможет быть виден выше  $22^\circ$ , а Венера – выше  $41^\circ$  над горизонтом. Внешние планеты Марс и Юпитер могут быть видны во время своей верхней кульминации вблизи точки летнего солнцестояния, например, во время противостояния в конце декабря. Но при этом Юпитер будет находиться вблизи эклиптики со склонением около  $+23^\circ$ , и его высота в Москве не превысит  $57^\circ$ . Марс может находиться севернее эклиптики, имея склонение до  $+27^\circ$  и кульминировать в Москве на высоте  $61^\circ$  над горизонтом.

6.15. Средняя плотность Сатурна составляет  $0.69 \text{ г/см}^3$  (это самая неплотная планета Солнечной системы), Юпитера –  $1.33 \text{ г/см}^3$ , Марса –  $3.93 \text{ г/см}^3$  и Земли –  $5.52 \text{ г/см}^3$ . Наша планета имеет самую большую плотность в Солнечной системе.

6.16. Радиус Луны равен 1738 км, радиус Каллисто – около 2400 км, радиус Титана – 2575 км и радиус Ганимеда – 2631 км.

6.17. Период обращения кометы Энке составляет 3.3 года – самый маленький из всех известных комет. Комета Галлея завершает один оборот вокруг Солнца за 75 лет, Нептун – за 165 лет, наконец, комета Хейла-Боппа тратит на это около 2000 лет.

6.18. Солнце – одиночная звезда,  $\alpha$  Центавра – система из трех звезд,  $\alpha$  Близнецов – шестикратная, а  $\theta$  Ориона представляет собой рассеянное звездное скопление, погруженное в туманность Ориона. Мы видим там семь звезд, хотя на самом деле их там может быть и больше.

6.19. Красный карлик – звезда главной последовательности с массой, меньшей массы Солнца. Максимальная масса белого карлика составляет 1.4 массы Солнца. Альциона – молодой горячий гигант со значительно большей массой.

6.20. Альциона – ярчайшая звезда молодого звездного скопления Плеяды, с возрастом около 100 миллионов лет. Спика – голубой гигант, продолжительность жизни которого меньше возраста Солнца. Звезды шаровых скоплений – одни из самых старых объектов в нашей Галактике.

6.21. Альдебаран – красный гигант спектрального класса K5, Капелла по спектральным свойствам похожа на Солнце (класс G5), Вега – белая звезда класса A0, наконец, Ригель – голубой сверхгигант спектрального класса B8.

6.22. Большое Магелланово облако – неправильная галактика, являющаяся спутником нашей Галактики. Остальные три галактики – спиральные, самые большие в Местной группе. Можно считать, что их размеры и светимость монотонно зависят от массы. Туманность Треугольника имеет меньшие размер и светимость, чем наша Галактика, а Туманность Андромеды превосходит нашу звездную систему по этим параметрам.

6.23. Галактики нужно выстроить в порядке, соответствующем их классификации по Хабблу. Наименьшее количество газа наблюдается в эллиптических галактиках, далее идут линзовидные и



спиральные, больше всего газа и наиболее интенсивное звездообразование наблюдается в неправильных галактиках.

6.24. Сверхновая звезда в максимуме блеска светит лишь немного слабее большой спиральной галактики наподобие нашей, значительно превосходя шаровые скопления. Квазары – самые яркие источники, видимые с огромных расстояний во Вселенной.

6.25. Тригонометрический параллакс можно измерить у сравнительно близких звезд в нашей Галактике. Цефеиды можно наблюдать и оценивать их светимости как в нашей, так и в других близких галактиках. Сверхновые могут наблюдаться и в далеких галактиках, так как в максимуме они почти сравниваются с ними в блеске. Наконец, красное смещение можно измерять для самых удаленных объектов во Вселенной.

#### ***Рекомендации по оцениванию теста:***

Тест можно оценивать по количеству правильных ответов (от 0 до 25), однако можно использовать более сложный и объективный способ. Каждый правильный ответ в этом случае оценивается в 8 баллов, а за неправильный ответ выставляется  $(6-N)$  баллов, где  $N$  – число единичных перестановок в ответе ученика, необходимых для получения правильного ответа. Под единичной перестановкой понимается перемена местами двух соседних букв в ответе участника. В зависимости от степени неточности ответа число  $N$  может принимать значения от 1 до 6, таким образом, за неточный ответ будет выставляться от 0 баллов (если все буквы написаны в обратной последовательности) до 5 баллов (перепутаны только две соседние буквы). В случае правильного ответа ( $N=0$ ) участник премируется двумя дополнительными баллами, и оценка, как говорилось выше, равняется 8. Максимальная оценка за весь тест составляет 200 баллов.

Пример. Правильный ответ – D, C, A, B, а участник теста дал ответ A, C, D, B. Для получения правильного ответа необходимы три единичных перестановки:

A, C, D, B – C, A, D, B – C, D, A, B – D, C, A, B.

Таким образом, за данный ответ нужно выставить 3 балла. Подобная методика сложна для ручной проверки, но достаточно легка для реализации в виде компьютерной программы.

## Часть 7. Задачи первых Московских Астрономических Олимпиад

### 1 Олимпиада (1947 год), I тур

7.1. Белые ночи наблюдаются вблизи летнего солнцестояния в северном полушарии на широтах, больших  $60.4^\circ$ , а также вблизи зимнего солнцестояния южнее параллели  $60.4^\circ$  ю.ш., где в это время наступает лето. На этих широтах Солнце даже в полночь не опускается под горизонт глубже, чем на  $6^\circ$ , и всю ночь длятся светлые гражданские сумерки, а за Полярным кругом и вовсе наступает полярный день.

7.2. Кометный хвост направлен от ядра кометы в сторону, противоположную Солнцу. Если первая из комет, оказавшись в перигелии на расстоянии 0.5 а.е. от Солнца, пройдет одновременно посередине между Солнцем и Землей, то ее хвост будет направлен в сторону Земли. Длина хвоста превышает 100 млн км, то есть 0.67 а.е., что больше, чем расстояние от кометы до Земли (0.5 а.е.). Следовательно, наша планета может пройти через хвост первой кометы. А вот хвост второй кометы, которая будет всегда находиться дальше от Солнца, чем Земля, всегда будет направлен во внешнюю область Солнечной системы, и Земля не сможет пройти через него.

7.3. 22 декабря Солнце находится вблизи точки зимнего солнцестояния. Марс находится в противостоянии, то есть вблизи точки летнего солнцестояния, и кульминирует в истинную солнечную полночь. Его высота в верхней кульминации составляет

$$h = 90^\circ - \varphi + \delta,$$

где  $\varphi$  – широта места наблюдения (равная  $+55.7^\circ$ ), а  $\delta$  – склонение Марса. Если не учитывать наклон орбиты Марса к эклиптике, то последняя величина составляет  $+23.4^\circ$ , и высота Марса над горизонтом оказывается равной  $57.7^\circ$ . Однако на самом деле во время противостояния во второй половине декабря Марс будет находиться в пространстве севернее плоскости эклиптики, и его склонение достигнет  $+26.7^\circ$ . Высота Марса над горизонтом в верхней кульминации на широте Москвы будет равна  $61^\circ$ . Во время проведения Первой Московской олимпиады по астрономии точка летнего солнцестояния находилась в созвездии Близнецов, к настоящему времени из-за прецессии земной оси она пересекла границу с созвездием Тельца.

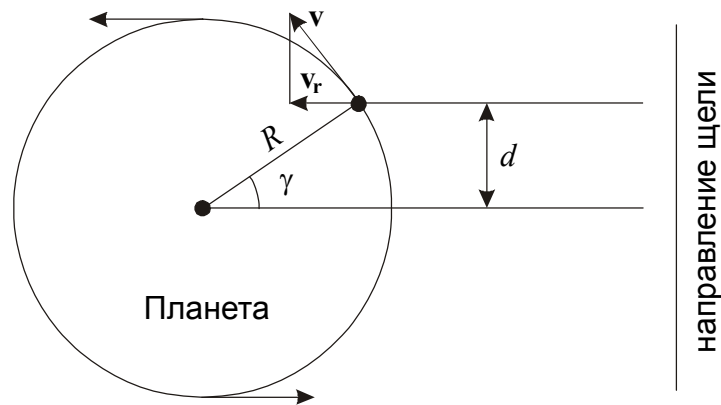
### 1 Олимпиада (1947 г.), II тур

7.4. Если затмение в данном пункте было центральным (полным или кольцеобразным), и Луна двигалась по диску Солнца снизу вверх, то это могло быть только во второй половине дня в экваториальных или тропических широтах Земли, где эклиптика, вдоль которой движется Луна, образует большой угол с горизонтом. Но если это затмение было частным с небольшой фазой, при котором диск Луны только задевает диск Солнца снизу, то такая ситуация могла наблюдаться на любой широте, более вероятно – в середине или во второй половине дня.

7.5. На разные участки щели будет попадать свет разных областей вдоль экватора планеты, по-разному двигающихся относительно наблюдателя. Лучевая скорость точки поверхности планеты, находящейся на расстоянии  $d$  от линии, соединяющей центр планеты и наблюдателя, равна

$$v_r = v \sin \gamma = v \frac{d}{R}.$$

Здесь  $v$  – полная скорость движения точки на экваторе,  $R$  – радиус планеты. Так как лучевая скорость, а значит, и смещение спектральных линий изменяются пропорционально  $d$ , и эти линии будут выглядеть как наклоненные прямые полосы.



7.6. По условию задачи поверхностная яркость (и эффективная температура) цефеиды остается постоянной, и блеск изменяется только за счет изменений ее пространственных и видимых размеров. В этом случае справедлива формула:

$$\Delta m = 5 \lg \frac{R_2}{R_1},$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы цефеиды в минимуме и максимуме блеска. Подставляя числовое значение величины  $\Delta m$ , получаем, что в максимуме цефеида имеет в 2 раза больший радиус, чем в минимуме.

### 2 Олимпиада (1948 год), I тур

7.7. Задача аналогична задаче 7.3, только теперь противостояние происходит вблизи летнего солнцестояния, и планета Юпитер находится рядом с точкой зимнего солнцестояния в созвездии Стрельца. Склонение этой точки составляет  $-23.4^\circ$ , и высота Юпитера в верхней кульминации будет равна

$$h = 90^\circ - \varphi + \delta = 10.9^\circ.$$

Здесь  $\varphi$  – широта Москвы ( $55.7^\circ$ ). Если учесть наклон орбиты Юпитера к плоскости эклиптики, то склонение этой планеты составит  $-23.2^\circ$ , а высота в верхней кульминации в Москве будет равна  $11.1^\circ$ .

7.8. Каким малым ни было бы перигелийное расстояние кометы  $r_p$ , мы можем записать неравенство для большой полуоси орбиты кометы:

$$a = \frac{r_p + r_A}{2} > \frac{r_A}{2} = 2.74 \text{ а.е.}$$

Здесь  $r_A$  – афелийное расстояние кометы. Применяя III закон Кеплера, мы получаем, что период обращения такой кометы вокруг Солнца не может быть меньше, чем  $(2.74)^{3/2} = 4.54$  года. Следовательно, описанная в романе комета в Солнечной системе существовать не может.

7.9. Обозначим радиусы звезды и ее спутника через  $R$  и  $r$ . Считая спутник темным и пренебрегая потемнением диска яркой звезды к краю, запишем отношение яркостей затменной переменной вне минимума и в минимуме блеска и приравняем его к  $n$ :

$$\frac{\pi R^2}{\pi R^2 - \pi r^2} = n.$$

Из этой формулы получаем выражение для отношения радиусов:

$$\frac{r}{R} = \sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$

### **2 Олимпиада (1948 год), II тур**

7.10. Данная задача аналогична задаче 7.4. Если затмение в данном пункте было центральным (полным или кольцеобразным), и Луна двигалась по диску Солнца сверху вниз, то это могло быть только в первой половине дня в экваториальных или тропических широтах Земли, где эклиптика, вдоль которой движется Луна, образует большой угол с горизонтом. Но если это затмение было частным с небольшой фазой, при котором диск Луны только задевает диск Солнца сверху, то такая ситуация могла наблюдаться на любой широте, более вероятно – в первой половине или в середине дня.

7.11. Данную задачу можно решить, используя III закон Кеплера, а можно вспомнить, что линейная скорость движения по круговой орбите равна первой космической скорости для данного расстояния от Солнца:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{a}} = v_0 \sqrt{\frac{a_0}{a}}.$$

Здесь  $M$  – масса Солнца,  $a_0$  – среднее расстояние от Земли до Солнца (астрономическая единица), а  $v_0$  – средняя скорость движения Земли по орбите, составляющая около 29.8 км/с.

7.12. Задачу можно решить только в предположении, что Сириус движется точно по направлению к Солнцу, и скорость его приближения остается постоянной (на самом деле это не так). Определим, на каком расстоянии должен оказаться Сириус, чтобы стать вдвое ярче. Это расстояние равно

$$r = \frac{r_0}{\sqrt{2}} = 1.9 \text{ пк.}$$

Чтобы стать вдвое ярче, Сириусу нужно пройти расстояние, равное 0.8 пк. Двигаясь со скоростью 8 км/с или  $8.2 \cdot 10^{-6}$  пк/год, Сириус преодолет это расстояние примерно за 97500 лет.

### **3 Олимпиада (1949 год), I тур**

7.13. Созвездие Ориона – одно из самых выразительных созвездий земного неба. Его фигура состоит из большого четырехугольника из звезд 1 и 2 звездной величины, в центре которого находятся еще три ярких звезды – «пояс Ориона». Ярчайшие звезды созвездия – Бетельгейзе и Ригель – сверхгиганты со светимостью, в десятки тысяч раз превосходящей светимость Солнца. Главная достопримечательность созвездия – яркая туманность Ориона, в которую погружена кратная звезда  $\theta$  Ориона. Созвездие Ориона видно практически всю ночь зимой, его также можно наблюдать во второй половине ночи осенью и весенними вечерами.

Созвездие Стрельца примечательно прежде всего тем, что в нем находится центр нашей Галактики. В этом созвездии можно увидеть большое число рассеянных и шаровых звездных скоплений и галактических туманностей. В созвездии Стрельца также находится точка зимнего солнцестояния – самая южная точка эклиптики. Это созвездие видно летними ночами, по утрам весной и вечером осенью.

7.14. Расположив щель спектроскопа вдоль большой оси колец Сатурна (как вдоль экватора планеты в задаче 7.5), по виду спектральной линии можно определить скорости отдельных частей кольца Сатурна. Проведя подобные наблюдения, А.А. Белопольский смог установить, что кольцо вращается вокруг Сатурна не как твердое тело – внутренние части кольца вращались быстрее внешних. Так было установлено метеоритное строение кольца Сатурна.

7.15. При параллактическом смещении звезда описывает в общем случае эллипс, эксцентриситет которого уменьшается от эклиптики к полюсам эклиптики. Звезда Регул ( $\alpha$  Льва) находится на эклиптике, и для нее эллипс превратится в отрезок прямой. Для звезды  $\delta$  Ориона, отстоящей от эклиптики примерно на  $25^\circ$ , эксцентриситет будет меньше, еще меньше он будет для Полярной звезды, располагающейся в  $66^\circ$  от эклиптики. Звезда  $\gamma$  Дракона находится на небе вблизи Северного полюса эклиптики, и в своем параллактическом движении за год она опишет окружность.

7.16. Интервал между двумя последовательными солнечными затмениями может составлять один или пять лунных синодических месяцев, но наиболее вероятное значение – шесть синодических месяцев или 177 дней. Поэтому, скорее всего следующее солнечное затмение произойдет вблизи 28 июня, а после этого – около 22 декабря (из-за эллиптичности орбиты Луны даты могут несколько отличаться). Лунное затмение происходит за половину синодического месяца до солнечного или через такой же промежуток времени после него (могут произойти сразу два затмения – и до, и после солнечного, но в этом случае оба они скорее всего будут полутеневыми). Поэтому лунное затмение может наступить в середине января, обязательно произойдет в июне или июле, а также возможно в декабре.

7.17. Полная Луна располагается на небе в области, противоположной Солнцу. В зимний период это окрестности точки летнего солнцестояния, в которые Солнце попадает летом. Склонение полной Луны зимой такое же, как у Солнца летом, и у нее будет такой же суточный путь на небе.

### ***3 Олимпиада (1949 год), II тур***

7.18. Утверждение в условии задачи верно лишь в приближении. Хотя склонение Солнца в эти даты и близко к нулю, продолжительность светлого времени суток будет больше 12 часов из-за явления атмосферной рефракции, «приподнимающего» небесные светила вблизи горизонта, а также из-за больших видимых размеров Солнца. На северном и южном полюсах Земли в эти дни будет светло круглые сутки – Солнце будет все время низко над горизонтом.

7.19. Параллакс звезды есть угол, под которым радиус земной орбиты виден с расстояния, разделяющего Солнце и данную звезду. Угловой диаметр звезды есть угол, под которым виден диаметр звезды с того же расстояния. Следовательно, диаметр звезды составляет  $(0.065/0.024) = 2.7$  а.е. или 405 млн км.

7.20. Синодический период внешней планеты  $S$  превышает один земной год, следовательно, планета обращается вокруг Солнца в том же направлении, что и Земля. В этом случае ее период обращения вокруг Солнца  $T$  может быть найден из соотношения:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{S}.$$

Здесь  $T_0$  – период обращения Земли вокруг Солнца. Подставляя численные значения, получаем, что период обращения планеты вокруг Солнца составляет 8.06 лет. Величина среднего расстояния планеты от Солнца, или, то же самое, большой полуоси ее орбиты, составляет

$$a = a_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{2/3} = 4.02 \text{ а.е.}$$

#### 4 Олимпиада (1950 год), I тур

7.21. Лунное затмение происходило во время зимнего солнцестояния. Луна, находясь в тени Земли, располагалась в противоположной Солнцу точке неба, то есть рядом с точкой летнего солнцестояния. Там же находился и Юпитер, то есть в это время он вступил в противостояние и располагался в пространстве с той же стороны от Солнца, что и Земля. На момент проведения Олимпиады точка летнего солнцестояния находилась в созвездии Близнецов, к концу XX века она перешла в созвездии Тельца.

7.22. Земля обращается вокруг Солнца по эллиптической орбите, проходя точку перигелия в начале января. Путь от точки, соответствующей осеннему равноденствию, то точки, где наступает весеннее равноденствие, Земля проходит быстрее, чем противоположную часть орбиты, поэтому полярный день на южном полюсе короче, чем на северном полюсе. Разница их продолжительности составляет 7 дней.

7.23. Если предположить, что Земля движется перпендикулярно к оси потока, то его ширина равна длине хорды, связывающей положения Земли в моменты начала и конца активности потока. Продолжительность активности потока составляла 39 дней. Считая орбиту Земли круговой, получаем, что угловое перемещение нашей планеты за это время  $\gamma$  равно  $38.4^\circ$ . Ширина метеорного потока равна

$$d = 2R \sin \frac{\gamma}{2} = 98.4 \text{ млн км.}$$

Здесь  $R$  – радиус земной орбиты.

7.24. При описании важнейших объектов необходимо упомянуть:

В созвездии Лиры: звезда Вега ( $\alpha$  Лиры) – одна из ярчайших звезд неба, звезда  $\beta$  Лиры – затменная переменная звезда с тесными компонентами, звезда  $\epsilon$  Лиры – кратная звезда, состоящая из двух пар. В этом созвездии находится также самая знаменитая планетарная туманность «Кольцо» (M57).

В созвездии Тельца: яркая красная звезда Альдебаран ( $\alpha$  Тельца), яркие рассеянные звездные скопления Плеяды и Гиады, Крабовидная туманность (M1), являющаяся остатком вспышки сверхновой звезды, наблюдавшейся в 1054 году.

В созвездии Персея: звезда Алголь ( $\beta$  Персея) – родоначальник класса затменных переменных звезд, двойное рассеянное звездное скопление  $\chi$  и  $\eta$  Персея, рассеянное звездное скопление M34.

7.25. Созвездие Змеи состоит из двух несоприкасающихся друг с другом частей, разделенных созвездием Змееносца. Вечером в марте обе части находятся под горизонтом и не видны.

#### 4 Олимпиада (1950 год), II тур

7.26. Задачу можно решить, считая орбиты Земли и планеты круговыми с радиусами  $R_0$  и  $R$ . В этом случае разница блеска планеты в соединении и противостоянии возникает только из-за изменения расстояния между Землей и планетой и равна

$$\Delta m = 5 \lg \frac{R+R_0}{R-R_0} = 1.$$

Решая данное уравнение, мы получаем  $R = 4.42 R_0$ . По III закону Кеплера можно получить соотношение между орбитальными периодами двух планет:

$$\frac{T}{T_0} = \left( \frac{R}{R_0} \right)^{3/2} = 9.29.$$

Синодический период планеты  $S$  определяется соотношением:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}.$$

Из этого соотношения мы получаем, что синодический период планеты составляет 409.3 суток. Промежуток времени между соединением и противостоянием планеты равен половине этого периода, то есть 204.65 суткам.

7.27. Такие области на Луне есть, и они покрывают около 18% всей лунной поверхности. Из-за либраций Луны наш спутник «покачивается» относительно земного наблюдателя, и области, находящиеся на границе видимого полушария Луны, периодически появляются и скрываются за лунным лимбом. При наблюдении из этих областей Луны Земля будет периодически появляться невысоко над горизонтом и скрываться за него.

7.28. Отношение яркостей звезд в максимуме и минимуме равно  $2.512^2 = 6.31$ . Подставляя это число в формулу, полученную в решении задачи 7.9, получаем отношение радиусов темного и светлого компонентов, равное 0.92. Отношение объемов компонентов будет равно  $0.92^3$ , то есть 0.78.

7.29. 1) Созвездия Щита, Лисички, Стрелы и Малого Коня находятся неподалеку от «летнего треугольника» и хорошо видны летом по ночам и осенними вечерами. Маленькое созвездие Щита находится правее и ниже созвездия Орла с яркой звездой Альтаиром. Выше созвездия Орла видно выразительное созвездие Стрелы, а еще выше – созвездие Лисички. Созвездие Малого Коня находится слева от созвездия Орла.

Созвездие Зайца находится под созвездием Ориона и лучше всего видно зимой. Созвездие Ворона находится под созвездием Девы и видно весенними ночами. Наконец, созвездие Рыси, находящееся между заметными созвездиями Близнецов и Большой Медведицы, в средних широтах практически не скрывается под горизонтом и хорошо видно большую часть года, кроме летних месяцев.

2) Созвездия: Весы, Компас, Микроскоп, Насос, Октант, Телескоп, Секстант, Часы.

3) Бетельгейзе – красная звезда спектрального класса М с температурой поверхности около 3000 К, Арктур и Альдебаран – оранжевые звезды класса К с температурой поверхности около 4000 К. Капелла – желтая звезда класса G с температурой поверхности около 6000 К, Процион – бело-желтая звезда класса F с температурой поверхности около 8000 К, Вега и Денеб – белые звезды класса A с температурой поверхности около 10000 К.

Последовательность этих звезд в порядке убывания блеска: Арктур, Вега, Капелла, Процион, Бетельгейзе, Альдебаран, Денеб.

7.30. Кроме 12 зодиакальных созвездий, эклиптика также проходит через созвездие Змееносца. В этом созвездии Солнце бывает в первой половине декабря.

### **5 Олимпиада (1951 год), I тур**

7.31. В принципе, ориентироваться можно по любой звезде на небе, если знать, в какое время она восходит, заходит или кульминирует. Верхняя кульминация звезды, склонение которой меньше, чем широта места наблюдения, происходит на юге. Восход и заход звезд вблизи небесного экватора происходят соответственно на востоке и западе.

7.32. Созвездия, всегда полностью находящиеся над горизонтом на широте Москвы: Малая Медведица, Дракон, Цефей, Кассиопея, Жираф, Ящерица. Созвездия, значительная часть которых никогда не заходит на широте Москвы: Большая Медведица, Гончие Псы, Волопас, Геркулес, Лира, Лебедь, Андромеда, Персей, Возничий, Рысь, Малый Лев.

Из этих созвездий апрельскими ночами лучше всего видны Большая и Малая Медведицы, Гончие Псы, Волопас, Дракон, Геркулес. Эти созвездия располагаются вблизи зенита. Остальные созвездия видны в северной части неба, а Андромеда и Персей лишь частично видны у северного горизонта.

7.33. С первого взгляда может показаться, что раз параллакс Солнца больше параллакса звезды в 20 раз, то звезда располагается в 20 раз дальше Солнца. Но это, конечно, не так. Для Солнца дано значение экваториального горизонтального параллакса, базисом которого служит экваториальный радиус Земли. Базис годичного параллакса – радиус земной орбиты – в 23450 раз больше. Поэтому звезда отстоит от нас в 469000 раз дальше Солнца.

7.34. Главное астрономическое открытие М.В. Ломоносова – обнаружение атмосферы Венеры на основе оптических эффектов, наблюдавшихся при ее прохождении по диску Солнца в 1761 году. Кроме этого, великий русский ученый усовершенствовал оптическую схему телескопа-рефлектора, сделал правильные заключения о строении Солнца, о природе сил отталкивания в хвостах комет, о бесконечности Вселенной и множестве обитаемых миров. Много работ М.В. Ломоносов провел также в смежных с астрономией областях науки: картографии, гравиметрии.

7.35. «Молодая» Луна бывает видна вечером, а «старая» – утром. Весенний вечер и осеннее утро – время, когда точка летнего солнцестояния находится вблизи верхней кульминации на большой высоте над горизонтом, и линия эклиптики образует с горизонтом значительный угол. Луна, находящаяся вблизи эклиптики, тоже располагается достаточно высоко, а рога ее серпа, направленные от Солнца вдоль эклиптики, обращены вверх.

### **5 Олимпиада (1951 год), II тур**

7.36. Для достижения максимальной высоты над горизонтом склонение Луны также должно достичь своего максимального значения. Это происходит, когда восходящий узел лунной орбиты совпадает с точкой весеннего равноденствия. Склонение Луны может достичь

$$\delta = \varepsilon + i = 28.6^\circ.$$

Здесь  $\varepsilon$  – угол наклона экватора к эклиптике, а  $i$  – наклонение орбиты Луны. Наш спутник будет находиться севернее точки летнего солнцестояния, на границе трех созвездий: Тельца, Близнецов и Возничего. В этой области неба Луна будет иметь полную фазу вблизи зимнего солнцестояния (22 декабря), а кульминация будет происходить около истинной солнечной полуночи. Если не учитывать суточный параллакс, то максимальная высота Луны над горизонтом составит

$$h = 90^\circ - \varphi + \delta = 62.9^\circ.$$

Здесь  $\varphi$  – широта Москвы. Для более точного ответа нужно также учесть параллактическое смещение Луны к горизонту, равное  $p_L \cos h$ , где  $p_L$  – экваториальный горизонтальный параллакс Луны, составляющий не менее  $0.9^\circ$ . В итоге, максимальная высота Луны над горизонтом составит  $62.5^\circ$ .

7.37. Среднее расстояние Плутона от Солнца составляет 39.5 а.е. Поэтому видимый диаметр Солнца на Плуtone будет в 39.5 раз меньше, чем на Земле, то есть всего  $49''$ , и диск Солнца не будет замечен невооруженным глазом. Звездная величина Солнца на Земле составляет  $-26.8^m$ , а на Плуtone она будет равна



$$m = -26.8 + 5 \lg 39.5 = -18.8.$$

Солнце на Плутоне будет на  $6.1^m$  ярче, чем полная Луна на Земле. В итоге, день на Плутоне будет в 275 раз светлее, чем лунная ночь на Земле.

7.38. Сидерический период обращения Амальтеи вокруг Юпитера  $T$  равен 11.956 часов, а период осевого вращения Юпитера  $T_0$  составляет 9.924 часа. Синодический период обращения Амальтеи по небу относительно наблюдателя на поверхности Юпитера вычисляется по формуле

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}$$

*<формула – файл e7\_38\_1.eps>*

и составляет 2.433 суток. Этот спутник будет восходить на востоке и заходить на западе, перемещаясь по небу намного медленнее Солнца, звезд и галилеевых спутников. Его угловые размеры составят около  $2'$  вблизи горизонта и  $3'$  в зените, и он будет периодически проходить по диску Солнца, имеющему видимый диаметр  $6'$ , и попадать в тень Юпитера. С точки зрения наблюдателя на Юпитере быстро движущиеся Солнце и тень планеты будут встречаться с почти неподвижной Амальтеей.

### **6 Олимпиада (1952 год), I тур**

7.39. Главная достопримечательность созвездия Андромеды – это спиральная галактика М31, часто называемая «туманностью Андромеды». Это крупнейшая галактика Местной группы, ближайшая к нашей Галактике спиральная система. Звезда  $\gamma$  Андромеды – одна из красивейших двойных звезд нашего неба.

Созвездие Пегаса имеет выразительную форму трапеции, близкой к квадрату («квадрат Пегаса»), одна из вершин которого принадлежит созвездию Андромеды. В созвездии Пегаса есть достаточно яркое шаровое звездное скопление М15.

Созвездие Кассиопеи также имеет примечательную форму – пять ярчайших звезд созвездия образуют очертание буквы М или W в зависимости от положения созвездия на небе. В 1572 году в этом созвездии вспыхнула сверхновая звезда, которую наблюдал Тихо Браге. Находясь в гуще Млечного Пути, это созвездие содержит множество рассеянных звездных скоплений, из которых можно выделить скопление М52.

Все три созвездия в северных широтах находятся над горизонтом большую часть суток, созвездие Кассиопеи и большая часть созвездия Андромеды в средней полосе России вообще не заходят за горизонт. Но лучше всего они видны осенью, располагаясь в середине ночи вблизи зенита.

7.40. Длина тени вертикального столба сравнивается с высотой столба, если Солнце находится на высоте  $45^\circ$  над горизонтом. 21 марта – день весеннего равноденствия, склонение Солнца в этот день равно  $0^\circ$ . Верхняя кульминация Солнца в этот день составляет  $45^\circ$  на широте  $45^\circ$  в северном и южном полушариях.

7.41. В.Я. Струве – основатель и первый директор Пулковской обсерватории. Им впервые был измерен параллакс далекой звезды (звезда Вега, 1837 год), были проведены многочисленные исследования двойных звезд. В.Я. Струве принадлежит идея о поглощении света в межзвездном пространстве и первая попытка определения этого поглощения. Он также занимался исследованием строения Млечного Пути. В.Я. Струве провел обширные точные геодезические измерения, давшие возможность определить размеры Земли. Под его руководством Пулковская обсерватория начала создание звездных каталогов, исключительных по своей точности.

## 6 Олимпиада (1952 год), II тур

7.42. Во время весеннего равноденствия, в 20-х числах марта, Земля движется по орбите в направлении от точки летнего солнцестояния, и измеренная лучевая скорость звезды равна

$$v_1 = v + u,$$

где  $v$  – лучевая скорость звезды относительно Солнца, а  $u$  – орбитальная скорость Земли. Через полгода Земля будет двигаться уже в направлении точки летнего солнцестояния, и измеренная лучевая скорость звезды составит

$$v_2 = v - u.$$

Подставляя численные данные, получаем  $v = -100$  км/с,  $u = 30$  км/с. Считая орбиту Земли круговой, мы вычисляем путь Земли, пройденный за период обращения вокруг Солнца  $T$  (1 год) и вычисляем радиус орбиты Земли:

$$R = \frac{uT}{2\pi} = 150.7 \text{ млн км.}$$

Полученная величина близка к истинному значению (149.6 млн км).

7.43. Две из указанных в условии задачи планет не будут видны на небе во время полной фазы затмения. Марс находится в противостоянии, в точке, противоположной Солнцу и в полдень окажется под горизонтом. Меркурий в нижнем соединении будет находиться рядом с Солнцем, имея очень слабый блеск, недостаточный для его обнаружения на фоне солнечной короны. Лишь Венера будет хорошо видна в  $47^\circ$  к западу от Солнца, являясь вторым по яркости объектом неба после солнечной короны.

Во время полной фазы затмения Солнце и затмившая его Луна находятся на границе созвездий Тельца и Близнецов. На потемневшем небе появятся яркие звезды: Капелла выше Солнца, Бетельгейзе и Ригель ниже его, еще ниже – Сириус. Справа от Солнца, примерно посередине между ним и Венерой, будет виден Альдебаран, слева от Солнца появятся Кастор и Поллукс, ниже них – Процион.

7.44. Рассеянное звездное скопление Плеяды и покрывающая их растущая Луна в день весеннего равноденствия хорошо видны по вечерам на большой высоте над горизонтом. Но в Москве в 18 часов Солнце только приближается к горизонту, и наблюдать покрытие на светлом дневном небе можно только с помощью телескопа. Гораздо лучше покрытие будет видно в Свердловске (ныне Екатеринбург), где уже наступит вечер. А вот в Комсомольске-на-Амуре будет глубокая ночь, Луна и Плеяды зайдут за горизонт незадолго до покрытия, и оно там видно не будет.

## СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ

### Основные физические и астрономические постоянные

Гравитационная постоянная  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2} = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$   
Скорость света в вакууме  $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с} = 2.998 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$   
Постоянная Планка  $\hbar = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1} = 6.63 \cdot 10^{-27} \text{ г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$   
Постоянная Больцмана  $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}$   
Универсальная газовая постоянная  $R = 8.31 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1} = 8.31 \cdot 10^7 \text{ г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$   
Постоянная Стефана-Больцмана  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4} = 5.67 \cdot 10^{-5} \text{ г} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}$   
Масса протона  $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1.67 \cdot 10^{-24} \text{ г}$   
Масса электрона  $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ кг} = 9.11 \cdot 10^{-28} \text{ г}$   
Энергия ионизации атома водорода  $E_H = 13.6 \text{ эВ} = 2.18 \cdot 10^{-18} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} = 2.18 \cdot 10^{-11} \text{ г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-2}$   
Астрономическая единица  $1 \text{ а.е.} = 1.496 \cdot 10^{11} \text{ м} = 1.496 \cdot 10^{13} \text{ см}$   
Парсек  $1 \text{ пк} = 206265 \text{ а.е.} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ м} = 3.086 \cdot 10^{18} \text{ см}$

### Данные о Солнце

Радиус 695 000 км  
Масса  $1.989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$   
Средняя плотность  $1.41 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$   
Ускорение силы тяжести на поверхности  $274.9.807 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$   
Вторая космическая скорость на поверхности  $617.7 \text{ км/с}$   
Светимость  $3.88 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$   
Спектральный класс G2V  
Сидерический период вращения главного меридиана 25.38 суток  
Средний синодический период вращения главного меридиана 27.275 суток  
Видимая звездная величина  $-26.8^{\text{m}}$   
Абсолютная визуальная звездная величина  $+4.82^{\text{m}}$   
Абсолютная болометрическая звездная величина  $+4.74^{\text{m}}$   
Показатель цвета (B-V)  $+0.67^{\text{m}}$   
Температура поверхности около 6000К  
Средний горизонтальный параллакс  $8.794''$

### Данные о Земле

Наименьшее расстояние от Солнца 0.983 а.е. или 147.1 млн км  
Наибольшее расстояние от Солнца 1.017 а.е. или 152.1 млн км  
Средняя скорость движения по орбите  $29.79 \text{ км/с}$   
Эксцентриситет орбиты 0.017  
Тропический год 365.24219 суток  
Сидерический год 365.25636 суток  
Аномалистический год 365.25964 суток  
Драконический год 346.62008 суток  
Период вращения 23 часа 56 минут 04 секунды  
Наклон экватора к эклиптике на эпоху 2000.0:  $23^\circ 26' 21.45''$   
Годичная прецессия оси вращения  $50.29''$   
Экваториальный радиус 6378.14 км  
Полярный радиус 6356.77 км  
Сжатие  $1/298.3$   
Масса  $5.974 \cdot 10^{24} \text{ кг}$   
Средняя плотность  $5.52 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$   
Ускорение силы тяжести на поверхности (стандартное)  $9.807 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$

Вторая космическая скорость на поверхности 11.19 км/с  
 Атмосферное давление на уровне моря (стандартное)  $1.013 \cdot 10^5 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$

### Данные о Луне

Среднее расстояние от Земли 384400 км  
 Минимальное расстояние от Земли 356410 км  
 Максимальное расстояние от Земли 406700 км  
 Средняя скорость движения по орбите 1.023 км/с  
 Средний эксцентриситет орбиты 0.055  
 Средний наклон плоскости орбиты к эклиптике  $5^\circ 09'$   
 Средний наклон экватора к эклиптике  $1^\circ 33'$   
 Максимальная либрация по долготе  $7^\circ 54'$   
 Максимальная либрация по широте  $6^\circ 50'$   
 Сидерический (звездный) период обращения 27.321662 суток  
 Синодический период обращения 29.530589 суток  
 Драконический период обращения 27.212221 суток  
 Аномалистический период обращения 27.554550 суток  
 Радиус 1738 км  
 Масса  $7.348 \cdot 10^{22}$  кг или 1/81.3 массы Земли  
 Средняя плотность  $3.34 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$   
 Ускорение свободного падения на поверхности  $1.62 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$   
 Вторая космическая скорость на поверхности 2.38 км/с  
 Визуальное геометрическое альbedo 0.12  
 Сферическое альbedo 0.07  
 Видимая звездная величина в полнолуние  $-12.7^m$

### ФИЗИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СОЛНЦА И ПЛАНЕТ

Планета	Масса		Радиус		Плотность	Период вращения вокруг оси	Наклон экватора к плоскости орбиты	Геометр. альbedo	Видимая звездная величина**
	кг	массы Земли	км	радиусы Земли					
Солнце	$1.989 \cdot 10^{30}$	332946	695000	108.97	1.41	25.380 сут	7.25	–	–26.8
Меркурий	$3.302 \cdot 10^{23}$	0.05271	2439.7	0.3825	5.42	58.646 сут	0.00	0.10	–0.1
Венера	$4.869 \cdot 10^{24}$	0.81476	6051.8	0.9488	5.20	243.019 сут*	177.36	0.65	–4.4
Земля	$5.974 \cdot 10^{24}$	1.00000	6378.1	1.0000	5.52	23.934 час	23.45	0.37	–
Марс	$6.419 \cdot 10^{23}$	0.10745	3397.2	0.5326	3.93	24.623 час	25.19	0.15	–2.0
Юпитер	$1.899 \cdot 10^{27}$	317.94	71492	11.209	1.33	9.924 час	3.13	0.52	–2.7
Сатурн	$5.685 \cdot 10^{26}$	95.181	60268	9.4494	0.69	10.656 час	25.33	0.47	0.4
Уран	$8.683 \cdot 10^{25}$	14.535	25559	4.0073	1.32	17.24 час*	97.86	0.51	5.7
Нептун	$1.024 \cdot 10^{26}$	17.135	24746	3.8799	1.64	16.11 час	28.31	0.41	7.8
Плутон	$1.5 \cdot 10^{22}$	0.003	1160	0.1819	1.1	6.387 сут*	122.52	0.3	15.1

\* – обратное вращение.

\*\* – для наибольшей элонгации Меркурия и Венеры и среднего противостояния внешних планет.

## ХАРАКТЕРИСТИКИ ОРБИТ ПЛАНЕТ

Планета	Большая полуось		Эксцентриситет	Наклон к плоскости эклиптики	Период обращения	Синодический период
	млн.км	а.е.				
Меркурий	57.9	0.3871	0.2056	7.004	87.97 сут	115.9
Венера	108.2	0.7233	0.0068	3.394	224.70 сут	583.9
Земля	149.6	1.0000	0.0167	0.000	365.26 сут	—
Марс	227.9	1.5237	0.0934	1.850	686.98 сут	780.0
Юпитер	778.3	5.2028	0.0483	1.308	11.862 лет	398.9
Сатурн	1429.4	9.5388	0.0560	2.488	29.458 лет	378.1
Уран	2871.0	19.1914	0.0461	0.774	84.01 лет	369.7
Нептун	4504.3	30.0611	0.0097	1.774	164.79 лет	367.5
Плутон	5913.5	39.5294	0.2482	17.148	248.54 лет	366.7

## ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕКОТОРЫХ СПУТНИКОВ ПЛАНЕТ

Спутник	Масса	Радиус	Плотность	Радиус орбиты	Период обращения	Геометрич. альbedo	Видимая звездная величина*
	кг	км	г/см <sup>3</sup>	км	сут		m
<b>Земля</b>							
Луна	$7.348 \cdot 10^{22}$	1738	3.34	384400	27.32166	0.12	-12.7
<b>Марс</b>							
Фобос	$1.08 \cdot 10^{16}$	~10	2.0	9380	0.31910	0.06	11.3
Деймос	$1.8 \cdot 10^{15}$	~6	1.7	23460	1.26244	0.07	12.4
<b>Юпитер</b>							
Амальтея	$7.17 \cdot 10^{18}$	~100	1.8	181300	0.498179	0.05	14.1
Ио	$8.94 \cdot 10^{22}$	1815	3.55	421800	1.769138	0.61	5.0
Европа	$4.8 \cdot 10^{22}$	1569	3.01	671100	3.551181	0.64	5.3
Ганимед	$1.48 \cdot 10^{23}$	2631	1.94	1070400	7.154553	0.42	4.6
Каллисто	$1.08 \cdot 10^{23}$	2400	1.86	1882800	16.68902	0.20	5.7
<b>Сатурн</b>							
Тефия	$7.55 \cdot 10^{20}$	530	1.21	294660	1.887802	0.9	10.2
Диона	$1.05 \cdot 10^{21}$	560	1.43	377400	2.736915	0.7	10.4
Рея	$2.49 \cdot 10^{21}$	765	1.33	527040	4.517500	0.7	9.7
Титан	$1.35 \cdot 10^{23}$	2575	1.88	1221850	15.94542	0.21	8.2
Япет	$1.88 \cdot 10^{21}$	730	1.21	3560800	79.33018	0.2	~11.0
<b>Уран</b>							
Миранда	$6.33 \cdot 10^{19}$	235.8	1.15	129900	1.413479	0.27	16.3
Ариэль	$1.7 \cdot 10^{21}$	578.9	1.56	190900	2.520379	0.34	14.2
Умбриэль	$1.27 \cdot 10^{21}$	584.7	1.52	266000	4.144177	0.18	14.8
Титания	$3.49 \cdot 10^{21}$	788.9	1.70	436300	8.705872	0.27	13.7
Оберон	$3.03 \cdot 10^{21}$	761.4	1.64	583500	13.46324	0.24	13.9
<b>Нептун</b>							
Тритон	$2.14 \cdot 10^{22}$	1350	2.07	354800	5.87685**	0.7	13.5
<b>Плутон</b>							
Харон	$1.77 \cdot 10^{21}$	635	1.83	19410	6.38725	0.5	16.8

\* – для полнолуния или среднего противостояния внешних планет.

\*\* – обратное направление вращения.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Предисловие</b>	2
<b>Московская Астрономическая Олимпиада глазами ее участников</b>	3
<b>Условия задач</b>	
Часть 1. 57 Московская Астрономическая Олимпиада (2003 год)	5
Часть 2. 58 Московская Астрономическая Олимпиада (2004 год)	8
Часть 3. 59 Московская Астрономическая Олимпиада (2005 год)	11
Часть 4. Дополнительные задачи	14
Часть 5. Открытая Заочная Астрономическая Олимпиада (2005 год)	19
Часть 6. Астрономический тест	20
Часть 7. Задачи первых Московских Астрономических Олимпиад	22
<b>Решения задач</b>	
Часть 1. 57 Московская Астрономическая Олимпиада (2003 год)	24
Часть 2. 58 Московская Астрономическая Олимпиада (2004 год)	33
Часть 3. 59 Московская Астрономическая Олимпиада (2005 год)	43
Часть 4. Дополнительные задачи	55
Часть 5. Открытая Заочная Астрономическая Олимпиада (2005 год)	83
Часть 6. Астрономический тест	94
Часть 7. Задачи первых Московских Астрономических Олимпиад	98
<b>Справочные данные</b>	107